

Cognome e nome Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica - Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2014/2015 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con k parametro reale:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + ky + kz = k - 1 \\ x - y + kz = -2 \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di k per cui il sistema non ammette soluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathcal{S}$ il sottoinsieme dello spazio $M_{2,2}(\mathbb{R})$, matrici reali di ordine 2, costituito dalle matrici $A = (a_{i,j})$ con $(a_{11} + a_{22} = 0) \wedge (a_{12} + a_{21} = 0)$.

a) Scrivere il generico elemento di $\mathcal{S}$ e, se $\mathcal{S}$ è un sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$, determinarne una base:

b) Indicato con $\mathcal{A}$ il sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche, determinare il generico elemento di $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$:

Esercizio 3. a) Sia determini la matrice A associata rispetto alla basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$ all'applicazione $L_A : (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - kz, 2x + y + (1 - k)z, ky, 2x + (1 - k)z)^T \in \mathbb{R}^4$.

b) determinare eventuali valori di k per cui L_A è surgettiva:

c) determinare eventuali valori di k per cui $\dim(\ker L_A) = 1$ ed una base per il corrispondente $\text{Im}(L_A)$:

d) determinare eventuali valori di k per cui $(0, 0, 0, 1)^T \in \text{Im}(L_A)$

Esercizio 4. a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per $A = (1, 0, 1)$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r_P passanti per $P = (3, -1, 1)$ e parallele al piano α .

c) Scrivere l'equazione cartesiana della generica sfera tangente al piano α in A .

d) Tra le sfere di cui al punto c) individuare la sfera S tangente al piano π . Tra le rette r_P di cui al punto b) scrivere equazioni cartesiane della retta tangente ad S .

Esercizio 5. Si risolva il sistema nelle variabili complesse z e w :

$$\begin{cases} (z + w)^3 = i \\ z - w = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Esercizio 6. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Gli autovalori di A ed i corrispondenti autospazi sono:

b) Si determinino gli eventuali valori del parametro reale k per cui $(3 + 2k, -k + 1, 1)^T$ e' autovettore di A .

Esercizio 7. Date le matrici quadrate A e B di ordine 4 a coefficienti reali, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $\text{rg}(A) = 4$, $A^2B = 0 \Rightarrow \text{rg}(B) \geq 1$ V F

b) $\det(A) \neq 0$, $B^2A = A \Rightarrow B = \pm I$ V F

c) $A^3 = 0 \Rightarrow \text{Im}(A^2) \subseteq \ker(A)$ V F

d) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ ammette l'autovalore 0 V F

e) Se $\text{rg}A = 3$ e $\text{rg}B = 3$ indicare quali tra i seguenti casi sono possibili:

• $\text{rg}(A^2B) = 0$ • $\text{rg}(A^2B) = 1$ • $\text{rg}(A^2B) = 2$ • $\text{rg}(A^2B) = 3$ • $\text{rg}(A^2B) = 4$

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2014/2015 - Secondo compito in itinere

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

a) Le radici caratteristiche di A sono:

b) I valori di k per cui A è triangolabile sono:

c) I valori di k per cui A è diagonalizzabile sono:

d) Per $k = 0$ si determini una base ortonormale dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$:

e) Per $k = 1$ si determinino i valori h tali che $(A - hI)^3$ non sia la matrice nulla.

Esercizio 2. a) Si scriva l'equazione cartesiana del cilindro proiettante la curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x - 4y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

secondo la direzione $v = (1, 1, -1)^T$:

b) Si consideri il punto $P(3, 2, -1)$ e si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per P che sezioni il cilindro in una conica γ doppiamente degenere.

Esercizio 3. Si risolva l'equazione complessa $\exp(z - \pi i) = 1 - \sqrt{3}i$.

Esercizio 4. Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k : kx^2 + (k-1)y^2 + kz^2 + 2xz + k + 1 = 0$.

a) Gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' non degenerare sono:

b) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' a punti ellittici sono:

c) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' un iperboloide iperbolico sono:

d) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' un cilindro parabolico sono:

Esercizio 5. a) Si determini l'equazione della parabola avente la retta $x - y - 1 = 0$ come diametro, come tangente nel punto $T(1, 0)$ la retta di equazione $3x - y - 3 = 0$ e passante per $P(4, 0)$.

b) Si determini l'equazione dell'asse di simmetria della parabola.

Esercizio 6. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche aventi la retta $y = 1$ coniugata al punto improprio dell'asse delle y e come tangente in $T(0, 2)$ la retta $2x + y - 2 = 0$.

a) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- in $\mathcal{F}$ esiste una conica avente per asse la retta $x + y - 1 = 0$ V F
- in $\mathcal{F}$ esiste una conica avente come centro $C(1, 3)$ V F
- in $\mathcal{F}$ esiste una conica tangente alla retta $x = -1$ V F

b) L'iperbole equilatera di $\mathcal{F}$ ha equazione:

Esercizio 7. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- 1) $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), rg(A) = 1 \Rightarrow tr(A) \neq 0$ V F
- 2) $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), A = A^T, x, y \in \mathbb{R}^n$ non nulli, $Ax = x$ e $Ay = -y \Rightarrow x \perp y$ V F
- 3) $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ non nulle, $A^2 = A$ e $B^2 = B \Rightarrow \det(AB) \neq 0$ V F
- 4) $A \in M_{3,3}(\mathbb{R}), rg(A^2) \neq rg(A), A^2$ non diagonalizzabile $\Rightarrow A$ e' nilpotente V F

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2013/2014 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Sia $T : (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x - y, 2x + z, y - z, z)^T \in \mathbb{R}^4$.

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|---|-------|
| a) $\dim(\ker T) = 1$ | V F |
| b) $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$ | V F |
| c) $\ker T = \operatorname{Span} \{(1, -1, 2)\}$ | V F |
| d) $T^{-1}(0, 0, 0, 0)$ e' sottospazio di $\mathbb{R}^3$ | V F |
| e) $(0, 0, 0, 1)^T \oplus \operatorname{Im} T = \mathbb{R}^4$ | V F |

Esercizio 2. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con k, h parametri reali:

$$\begin{cases} hx - y + (1 - h)z = 0 \\ x + (1 - h)z = -1 + h + k \\ (1 - h)x + y + (2 - h)z = 1 - h - k \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di h e k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di h e k per cui il sistema non ammette soluzione:

c) determinare eventuali valori h e k per cui il sistema ammette infinite soluzioni:

Esercizio 3. Sia A' la matrice completa relativa al sistema dell'esercizio n.2 e sia $L_{A'} : (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente A' come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$;

a) determinare i valori di h e k per cui $\dim \operatorname{Im} L_{A'} = 3$:

b) determinare i valori di h e k per cui $\dim \ker L_{A'} = 2$:

c) per $h = 2$ e $k = -1$, determinare la controimmagine del vettore $e_1 - e_2 - 2e_3$, specificando se si tratta di un sottospazio vettoriale.

Esercizio 4. a) Assegnate le rette $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s .

b) Determinare una rappresentazione cartesiana per il luogo dei punti dello spazio $P = (x, y, z)$ appartenenti al piano π ed aventi distanza 5 dal punto $Q = (2, 2, -2)$. Di che cosa si tratta?

Esercizio 5. a) Le equazioni delle sfere tangenti nell'origine al piano $\alpha : x - y + z = 0$ e tangenti ulteriormente al piano $\beta : x + y - z = 1$:

Esercizio 6. Sia $T : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare con $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $\dim \operatorname{Im} T = n \implies n \leq m$ V F

b) $\dim \ker T = 0 \implies n = m$ V F

c) T iniettiva $\implies \ker T = \{0_V\}$ V F

d) $n = m \wedge \dim (\ker T) = 1 \implies T$ non surgettiva V F

Esercizio 7. Date la matrice quadrata A , di ordine 5 a coefficienti reali.

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $A^2 = A \implies \det A \neq 0$ V F

b) $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A^2) \implies \ker(A) \supsetneq \ker(A^2)$ V F

c) $A^2 = A \implies \ker(A) \cap \operatorname{Im}(A) = \{0_V\}$ V F

d) $A^2 = A \implies \operatorname{Im}(A^5) = \operatorname{Im}(A)$ V F

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2013/2014 - Secondo compito in itinere

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2-k & 2k-2 & 2k-2 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 2k & k \end{pmatrix}$$

a) Le radici caratteristiche di A sono:

b) I valori di k per cui A è triangolabile sono:

c) I valori di k per cui A è diagonalizzabile sono:

d) Per $k = 0$ si determini una base dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 0$:

Esercizio 2. a) Si scriva l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta ruotando la retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$ attorno alla retta $a : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ e la si classifichi:

b) Si scrivano le equazioni della circonferenza γ di raggio minimo contenuta in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, il suo sottospazio $V' = \{(x, y, z)^T : 2x - y = 0\}$ ed il vettore $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^T \in V'$. Si determini una base ortonormale di V' comprendente v .

Esercizio 4. Si considerino i numeri complessi $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

a) Si determinino in forma algebrica i numeri complessi z_1^{27} e z_1^{29} :

b) Si determini $|z_2^4|$ e $|z_1^{273} \cdot z_2^4|$.

c) I numeri complessi z tali che $\exp(z) = z_1$ sono:

d) Tra le soluzioni z del punto c) si individuino quelle aventi parte immaginaria minore di 8π .

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ generato dalle coniche $\gamma_1 : x^2 + y^2 - 2 = 0$ e $\gamma_2 : xy = 1$, per il quale consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 - 2 + 2\lambda(xy - 1) = 0$.

a) Si determinino i punti base e le coniche degeneri del fascio $\mathcal{F}$.

b) Si determinino le equazioni delle rette tangenti comuni a tutte le coniche del fascio.

c) Si determinino eventuali elementi di simmetria comuni a tutte le coniche del fascio.

d) Si determinino i punti che hanno la medesima polare rispetto a tutte le coniche del fascio.

e) Si determini la conica del fascio che ha un asintoto parallelo alla retta $r : x - 2y = 3$.

Esercizio 6. Scrivere la matrice A diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ e corrispondenti autospazi $V_{\lambda_1} = \text{Span}((1, 0, 1)^T)$, $V_{\lambda_2} = \text{Span}((0, 0, 1)^T)$ e $V_{\lambda_3} = \text{Span}((0, 1, 1)^T)$.

Esercizio 7. Rispondi alle seguenti domande:

a) Se $A^T = -A$, $\lambda = 1 + 3i$ può essere radice caratteristica di A ? (Si) (No)

b) Sia $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 10$. Il determinante di A^3 e'

c) Se $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ e' nilpotente con $\dim(\ker(A)) = 3$, l'indice di nilpotenza e'

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2012/2013 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con h parametro reale:

$$\begin{cases} x + h y - z = h \\ h x + y - h z = 1 \\ x + z = -2h \\ (h + 2)x + (1 + h)y - h z = 1 - h \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di h per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di h per cui il sistema non ammette soluzione:

c) determinare eventuali valori h per cui il sistema ammette infinite soluzioni:

Esercizio 2. Sia A' la matrice completa relativa al sistema dell'esercizio n.1 e sia $L_{A'} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare avente A' come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$;

a) determinare i valori di h per cui $\dim \operatorname{Im} L_{A'} = 3$:

b) determinare i valori di h per cui $\dim \ker L_{A'} = 2$:

c) per $h = 0$, determinare i valori del parametro k per cui il vettore $e_1 + k e_2 + (1 + k) e_3 + e_4$ appartiene ad $\operatorname{Im} L_{A'}$:

Esercizio 3. Calcolare:

a) z^{1303} essendo $z = \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$:

b) i numeri complessi w che risolvono l'equazione complessa $\exp w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

c) i numeri complessi z che risolvono l'equazione complessa $\exp(2\bar{z} - \pi i) = \exp z$

Esercizio 4. a) Il luogo dei centri delle sfere tangenti in $O = (0, 0, 0)$ alla retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$ e':

b) La sfera Γ tangente alle rette r ed $s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$ rispettivamente nei punti O ed $S = (0, 0, 2)$ ha equazione:

c) La circonferenza sezione di Γ con il piano $\alpha : y + z + 1 = 0$ ha centro e raggio:

d) La sfera avente lo stesso centro di Γ e tangente al piano α ha equazione:

Esercizio 5. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false Date le matrici quadrate A, B di ordine 5 a coefficienti reali

a) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \dim \ker(A^2BA) = \dim \ker B$ V F

b) $\det(-2AB) = 2^5 \det(A) \det(B)$ V F

Dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $V = \text{Span}\{(1 \ 0 \ -2 \ 3)^T, (-1 \ 2 \ -3 \ 0)^T, (0 \ 2 \ -5 \ -3)^T\}$ e $W = \text{Span}\{(0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T\}$

a) $\dim V = 3$ V F

b) $\dim W = 2$ V F

c) $\dim(V \cap W) > 1$ V F

d) $W' = \text{Span}\{(0 \ 0 \ 0 \ 1)^T\}$ e' sommando diretto di V V F

Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\forall v \in V' = \text{Span}\{(1 \ 0 \ 1)^T, (0 \ 1 \ -1)^T\}$ si ha $T(v) = v$ e risulta $\ker T = \text{Span}\{(0 \ 1 \ 0)^T\}$. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica.

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2012/2013 - Secondo compito in itinere

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2+a \\ -1-a & -a & -1-a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Le radici caratteristiche di A sono:

b) I valori di a per cui A è triangolabile sono:

c) I valori di a per cui A è diagonalizzabile sono:

d) Per $a = 1$ l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$ è:

e) Per $a = 1$ gli autovalori di A^2 sono:

f) Per $a = 1$ un autovettore di A che è anche autovettore di A^2 è:

Esercizio 2. a) L'equazione del cono $\mathcal{C}$ di vertice $V = (0, 0, 1)$ e direttrice $\begin{cases} 3y^2 - z^2 + 2z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ è:

b) Determinare i valori dei parametri reali h e k tali che la sezione del cono $\mathcal{C}$ con il piano $z = 0$ coincida con la conica di equazione

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + (k-h)y^2 - (4k-h)xy + k + h + 8 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 a) Le coordinate omogenee dei punti impropri A_∞ ed A'_∞ della conica $\gamma : x^2 + 3y^2 - 4xy - 2x + 1 = 0$ sono rispettivamente

b) gli asintoti a ed a' di γ hanno equazione rispettivamente

c) il polo della retta impropria rispetto a γ ha coordinate omogenee

d) Il fascio $\mathcal{F}$ di iperboli aventi come asintoti le rette a ed a' ha , in coordinate omogenee, equazione

e) le coniche degeneri del fascio hanno equazioni

Esercizio 4. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche aventi, tra i suoi punti base, il punto di coordinate omogenee $(1, -1, 0)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):

- a) in $\mathcal{F}$ possono esistere circonferenze (V) (F)
- b) in $\mathcal{F}$ possono esistere parabole (V) (F)
- c) in $\mathcal{F}$ possono esistere parabole con asse parallelo alla retta $r : x - y + 1 = 0$ (V) (F)
- d) in $\mathcal{F}$ possono esistere iperboli equilateri (V) (F)

Esercizio 5. Dire se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):

- a) $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $\det A = 0$, $\text{tr} A = 0$, $A^3 \neq 0 \Rightarrow A$ non diagonalizzabile (V) (F)
- b) $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\text{rg} A = 1$, $\lambda = 2$ autovalore di $A \Rightarrow \text{tr} A = 2$ (V) (F)
- c) $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\text{rg} A = 1$, $\text{tr} A = 0 \Rightarrow A$ nilpotente (V) (F)

Esercizio 6. Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k$ avente come matrice assegnata $\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}$;

a) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' riducibile sono:

b) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' un paraboloide sono:

c) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' un cono reale sono:

d) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' un ellissoide sono:

e) gli eventuali valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ e' un iperboloide a due falde sono:

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2011/2012 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con k, h parametri reali:

$$\begin{cases} kx + y - z = -k \\ (1 - k)y + z = h + k \\ y + (1 - k)z = 2h + 1 \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di k e h per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di k e h per cui il sistema non ammette soluzione:

c) determinare eventuali valori di k e h per cui il sistema ammette infinite soluzioni:

Esercizio 2. Sia A' la matrice completa relativa al sistema dell'esercizio n.1 e sia $L_{A'} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente A' come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$;

a) determinare i valori di k e h per cui $\dim \operatorname{Im} L_{A'} = 3$:

b) determinare i valori di k e h per cui $\dim \operatorname{ker} L_{A'} = 2$:

c) per $h = -1, k = 0$ determinare una base di $\operatorname{Im} L_{A'}$ e completare ad una base di $\mathbb{R}^3$:

d) per $h = -1, k = 0$ determinare la controimmagine del vettore $e_1 + e_2 + e_3$:

Esercizio 3. Si consideri l'equazione complessa

$$(**) \quad z^3 + (a - 1)z^2 - (1 - a)z + a^2 = 0 ;$$

a) i valori di a per cui l'equazione ammette come unica soluzione reale $z = -1$ sono:

b) Per i valori trovati le soluzioni dell'equazione (**) sono:

c) Indicato con z_1 una soluzione di (**) con parte immaginaria negativa, si risolva l'equazione $\exp z = z_1$:

Esercizio 4. Si considerino le rette sghembe $r : \begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + y - z + 4 = 0 \\ y = -x \end{cases}$

a) l'equazione cartesiana del piano per r parallelo ad s e':

b) la minima distanza d tra r ed s e':

c) l'equazione della sfera Γ tangente ad r ed s di raggio minimo e':

d) le equazioni dei piani paralleli a $\pi : x + y + z - 2 = 0$ che intersecano la sfera Γ in una circonferenza di raggio uguale a 1 sono:

e) l'equazione del luogo dei centri delle circonferenze di raggio 1 ottenute dalla sezione di Γ con opportuni piani e':

Esercizio 5. Date le matrici quadrate A, B di ordine 5 a coefficienti reali dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $AB \neq O \Rightarrow A$ invertibile V F

b) $AB = I_5 \Rightarrow A, B$ invertibili V F

c) $AB = BA \Rightarrow A, B$ invertibili V F

d) $AB = O \Rightarrow A = O$ oppure $B = O$ V F

e) $AB = O \Rightarrow \dim \text{Im} B \leq \dim \ker A$ V F

f) Se $\text{rg} A = 4$ e $\text{rg} B = 2$ indicare quali tra i seguenti casi sono possibili:

- | | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| • $\text{rg}(AB) = 0$ | • $\text{rg}(AB) = 1$ | • $\text{rg}(AB) = 2$ | • $\text{rg}(AB) = 3$ | • $\text{rg}(AB) = 4$ | • $\text{rg}(AB) = 5$ |
| • $\text{rg}(BA) = 0$ | • $\text{rg}(BA) = 1$ | • $\text{rg}(BA) = 2$ | • $\text{rg}(BA) = 3$ | • $\text{rg}(BA) = 4$ | • $\text{rg}(BA) = 5$ |

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2011/2012 - Secondo compito in itinere

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ k & k-1 & k \\ 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli eventuali valori di k per cui A è triangolabile:

b) Determinare gli eventuali valori di k per cui A è diagonalizzabile:

c) Per $k = 2$ gli autospazi di A sono:

d) Per $k = 2$ determinare un eventuale vettore di $\text{Im}A$ che non appartenga ad $\text{Im}A^2$:

e) Per $k = 2$ una base di $(\text{Im}A)^\perp$ è:

Esercizio 2. a) L'equazione del cono $\mathcal{C}$ di vertice $V = (0, 0, 0)$ tangente alla sfera di equazione $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ è:

b) Determinare le equazioni della conica degenera passante per il punto $A = (1, 1, 0)$ sezione del cono $\mathcal{C}$ con un piano perpendicolare al piano $z = 0$ e scrivere le equazioni delle componenti la suddetta conica degenera:

Esercizio 3. Si considerino i numeri complessi $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ e $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Barrare con una croce le risposte ritenute corrette:

- a) $\left| z - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| w - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$; b) $z^6 = w^2$;
- c) $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)$; d) $\exp(z^2 + w + 6\pi i) = 1$

Esercizio 4. Dato il fascio di coniche

$$(x+y)(x-3y+2) + 2\lambda(y-1)(x-y+2) = 0$$

a) i punti base del fascio sono:

b) le eventuali rette tangenti comuni a tutte le coniche del fascio sono:

c) le coniche degeneri del fascio sono:

d) i punti impropri della generica conica del fascio sono:

e) gli asintoti dell'iperbole del fascio passante per $P = (3, 0)$ hanno equazioni:

Esercizio 5. a) Le equazioni delle similitudini dirette che hanno $A = (0, 1)$ come punto fisso e che trasformano il punto $B = (1, 0)$ in un punto della retta $y = 0$ sono:

b) Tra le similitudini trovate al punto a) determinare quelle che hanno rapporto di similitudine uguale a $\sqrt{5}$.

Esercizio 6. Sia data una matrice quadrata reale A di ordine n , indicare con una V le risposte ritenute corrette e con una F quelle ritenute sbagliate:

- a) $\forall A \quad A + A^T$ e' una matrice diagonalizzabile (V) (F)
- b) $\forall A \quad A - A^T$ e' una matrice diagonalizzabile (V) (F)
- c) se A ha rango massimo, anche $A + A^T$ ha rango massimo; (V) (F)
- d) se $\det A = 1$, abbiamo che $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} B$ per ogni matrice B quadrata di ordine n . (V) (F)

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2010/2011 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con a, b parametri reali:

$$\begin{cases} (1-a)x - y + az = b \\ x + az = -a \\ ax + y + (a+1)z = a+b \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui il sistema non ammette soluzione:

c) determinare eventuali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette infinite soluzioni:

Esercizio 2. Posto $b = 1$, sia A' la matrice completa relativa al sistema dell'esercizio n.1 e sia $L_{A'} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente A' come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$;

a) determinare $\dim(\text{Im } L_{A'})$ al variare di a :

b) per $a = -1$ determinare una base del nucleo di $L_{A'}$:

c) per $a = 1$ determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che sia in somma diretta con $\text{Span}(L_{A'}(1, 0, 1, 0)^T, L_{A'}(0, 1, -1, 0)^T)$:

Esercizio 3. Si consideri l'equazione complessa

$$z^6 - (1+i)z^3 + i = 0 ;$$

scrivere in forma albrica le soluzioni dell'equazione:

Esercizio 4. Determinare il polinomio a coefficienti reali di grado minimo, monico, che ammette $z_1 = -1$, $z_2 = 1 + i$ come radici semplici e $z_3 = -i$ come radice doppia:

Esercizio 5. a) Sia data la retta $t : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}$, si determini l'equazione del piano π contenente t e passante per il punto $P(1, -2, -1)$:

b) scrivere l'equazione del piano α per $T(1, 1, 2)$ ed ortogonale a t :

c) determinare l'equazione della sfera S tangente in T alla retta t , passante per P ed avente centro sul piano π :

d) determinare le equazioni della circonferenza γ tangente a t in T e passante per P :

Esercizio 6. Si consideri $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\ker(T)) = 2$; dire quali delle seguenti affermazioni sono vere, possibili oppure impossibili:

a) $\mathbb{R}^4 = \ker(T) \oplus \text{Im}(T)$	Vero $\forall T$	Falso $\forall T$	Vero per alcune T e falso per altre T
b) $\dim(\text{Im}(T^2)) = 2$ e $\dim(\text{Im}(T) \cap \ker(T)) = 1$	Vero $\forall T$	Falso $\forall T$	Vero per alcune T e falso per altre T
c) $\dim(\text{Im}(T^2)) = 1$ e $\dim(\ker(T^3)) = 3$	Vero $\forall T$	Falso $\forall T$	Vero per alcune T e falso per altre T
d) $\dim(\text{Im}(T^2)) = 1$ e $\dim(\ker(T^2)) = 2$	Vero $\forall T$	Falso $\forall T$	Vero per alcune T e falso per altre T
e) $\dim(\text{Im}(T^3)) = 0$ e $\text{Im}(T^2) \subseteq \ker(T)$	Vero $\forall T$	Falso $\forall T$	Vero per alcune T e falso per altre T

(barrare una sola risposta)

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2010/2011 - Secondo compito in itinere

Esercizio 1. Si consideri la matrice A con a parametro reale

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 2-2a \\ 0 & 2 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli eventuali valori di a per cui A e' triangolabile.

b) Determinare gli eventuali valori di a per cui A e' diagonalizzabile.

c) Determinare gli eventuali valori di a e i corrispondenti k per cui $(A - kI)$ risulti nilpotente.

d) Per $a = 2$ dire se esistono valori di h per cui $(3, h+1, h+1)^T$ sia autovettore.

e) Determinare gli eventuali valori di a per cui $AA^T + I$ diagonalizzabile.

Esercizio 2. a) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$(\exp z)^2 - (1 + 2i) \exp z - 1 + i = 0$$

b) Tra le soluzioni del punto precedente, indicare quelle tali che $|z - 3i| \leq 3$

Esercizio 3. Si consideri la sfera S di centro $(1, 1, 1)$ e raggio 2 e il punto $V(1, 5, 1)$.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano polare di V rispetto a S .

b) Scrivere l'equazione cartesiana del cono $\mathcal{C}$ di vertice V e tangente a S .

c) Scrivere le equazioni delle rette passanti per V , tangenti a S e parallele al piano $z = -1000$.

Esercizio 4. Sono date le coniche $\gamma_1 : 4x^2 + y^2 = 5$ e $\gamma_2 : xy + x - y - 1 = 0$.

a) Classificare γ_1 e γ_2 .

Si consideri il fascio di coniche generato da γ_1 e da γ_2 utilizzando per esso la rappresentazione

$$4x^2 + y^2 - 5 + 2\lambda(xy + x - y - 1) = 0.$$

b) Determinare i punti base del fascio.

c) Determinare le coniche degeneri del fascio.

d) Scrivere l'equazione delle eventuali parabole del fascio.

e) Determinare l'equazione di eventuali rette tangenti a tutte le coniche del fascio.

Esercizio 5. a) Determinare, se esiste, l'affinità φ_t che manda $(0, 0)$ in $(t, 1)$, $(1, 0)$ in $(2t, t + 1)$, $(0, 1)$ in $(t + 1, t + 1)$ al variare del parametro reale t .

b) Determinare eventuali valori di t per cui si ottiene una similitudine.

c) Per $t = 2$ determinare l'area dell'immagine del cerchio di centro $C(-789, 2)$ e raggio 3.

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2009/2010 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con h parametro reale:

$$\begin{cases} x + h^2 y = 2 - 2h \\ x + y = 0 \\ (1 - h)x - y + z = 4 - 2h \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema non ammette soluzione:

c) determinare eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette infinite soluzioni:

Esercizio 2. Sia A' la matrice completa relativa al sistema dell'esercizio n.1 e sia $L_{A'} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente A' come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$;

a) determinare la $\dim(\operatorname{Im} L_{A'})$ al variare di h :

b) indicare i valori di h per cui l'applicazione $L_{A'}$ e' surgettiva:

c) determinare i valori di h per cui il vettore $(3 - h, 3 + 2h, -7 - h)$ appartiene ad $\operatorname{Im}(L_{A'})$:

Esercizio 3. Risolvere l'equazione complessa

$$|z|z^3 + z^3 - 8|z|i - 8i = 0$$

Esercizio 4. a) Si consideri la sfera S di equazione $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$; calcolarne le coordinate del centro e la misura del raggio:

b) Scrivere l'equazione parametrica della retta r_k , passante per i punti $A = (1, 0, -2)$ e $B_k = (0, 2, -2 - k)$ con $k \in \mathbb{R}$:

c) Se P_k e Q_k sono i punti di intersezione di r_k con S , si dia la lunghezza del segmento $P_k Q_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$:

d) Posto $k = 0$, determinare l'equazione di eventuali piani per la retta $r_{k=0}$ che intersechino la sfera S e la sfera $S' : x^2 + y^2 + z^2 - x + y + z - \frac{7}{2} = 0$ in circonferenze di ugual raggio:

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \neq 0$ e sia $T : V \rightarrow V$ un'applicazione lineare con $\text{Ker } T = \text{Im } T$; dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) $T = 0$	VERO	FALSO
b) $T = I$	VERO	FALSO
c) T e' iniettiva	VERO	FALSO
d) V e' somma diretta di nucleo ed immagine	VERO	FALSO
e) $\dim V$ e' un numero pari	VERO	FALSO
f) T coincide con la sua inversa	VERO	FALSO
g) $T^2 = 0$	VERO	FALSO

(barrare la risposta ritenuta esatta)

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2009/2010 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con h parametro reale:

$$\begin{cases} x + h^2 y = 2 - 2h \\ x + y = 0 \\ (1 - h)x - y + z = 4 - 2h \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

$$h \neq 1 \wedge h \neq -1$$

b) determinare eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema non ammette soluzione:

$$h = -1$$

c) determinare eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette infinite soluzioni:

$$h = 1$$

Esercizio 2. Sia A' la matrice completa relativa al sistema dell'esercizio n.1 e sia $L_{A'} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente A' come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$;

a) determinare la $\dim(\text{Im } L_{A'})$ al variare di h :

$$\dim(\text{Im } L_{A'}) = \begin{cases} 3 & \text{se } h \neq 1 \\ 2 & \text{se } h = 1 \end{cases}$$

b) indicare i valori di h per cui l'applicazione $L_{A'}$ è surgettiva:

$$\forall h \neq 1$$

c) determinare i valori di h per cui il vettore $(3 - h, 3 + 2h, -7 - h)$ appartiene ad $\text{Im}(L_{A'})$:

$$\forall h \neq 1$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione complessa

$$|z|z^3 + z^3 - 8|z|i - 8i = 0$$

$$(|z|+1) \cdot (z^3 - 8i) = 0$$

$$z_1 = -2i$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$z_3 = -\sqrt{3} + i$$

Esercizio 4. a) Si consideri la sfera S di equazione $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$; calcolarne le coordinate del centro e la misura del raggio:

$$c(1; 0; -2) ; R = 2$$

b) Scrivere l'equazione parametrica della retta r_k , passante per i punti $A = (1, 0, -2)$ e $B_k = (0, 2, -2 - k)$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}$$

c) Se P_k e Q_k sono i punti di intersezione di r_k con S , si dia la lunghezza del segmento $P_k Q_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\overline{P_k Q_k} = 4 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

d) Posto $k = 0$, determinare l'equazione di eventuali piani per la retta $r_{k=0}$ che intersechino la sfera S e la sfera $S': x^2 + y^2 + z^2 - x + y + z - \frac{7}{2} = 0$ in circonferenze di ugual raggio:

$$r_0: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \pi_1: & 2x + y + 2z + 2 = 0 \\ \pi_2: & 8x + 4y + z - 6 = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \neq 0$ e sia $T: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare con $\text{Ker } T = \text{Im } T$; dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) $T = 0$	VERO	FALSO
b) $T = I$	VERO	FALSO
c) T e' iniettiva	VERO	FALSO
d) V e' somma diretta di nucleo ed immagine	VERO	FALSO
e) $\dim V$ e' un numero pari	VERO	FALSO
f) T coincide con la sua inversa	VERO	FALSO
g) $T^2 = 0$	VERO	FALSO

(barrare la risposta ritenuta esatta)

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2009/2010 - Secondo compito in itinere

Esercizio 1. Si consideri la matrice A con a e k parametri reali

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & 2a+1 & k-5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare il valore di k per cui $\frac{\sqrt{7}-1}{3} e_3$ e' autovettore associato all'autovalore $\lambda = 0$.

Per tale valore di k

b) L'equazione caratteristica di A e':

c) I valori di a per cui A e' triangolabile sono:

d) I valori di a per cui A e' diagonalizzabile sono:

e) Dire se esistono valori di a per cui esiste una base ortonormale di autovettori.

f) Posto $a = 0$, determinare r in modo tale che $Im(A^r) = ker A$.

Esercizio 2. a) L'equazione della circonferenza γ appartenente al piano $z = -4$, con centro sull'asse z e raggio 2 e':

b) L'equazione del cono $\mathcal{C}$ di vertice l'origine degli assi ed avente γ come direttrice.

c) Scrivere l'equazione della sfera contenente γ e tangente internamente $\mathcal{C}$.

Esercizio 3. a) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$\exp z = \sqrt{3} - i$$

b) Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \exp z = \sqrt{3} - i \\ \left(z - \ln 2 + \frac{13}{6} \pi i \right) (z - \ln 2 - 2i) \left(z - \ln 2 - \frac{11}{6} \pi i \right) = 0 \\ \operatorname{Im} z < -\frac{7}{6} \pi \end{cases}$$

Esercizio 4. Si consideri il fascio di coniche generato da $\gamma_1: x^2 + 3(y+2)^2 - 12 = 0$ e da $\gamma_2: xy + y^2 + 4y = 0$ utilizzando per esso la rappresentazione $x^2 + 3(y+2)^2 - 12 + 2\lambda(xy + y^2 + 4y) = 0$.

a) Determinare i punti base del fascio.

b) Determinare le equazioni delle coniche degeneri del fascio.

c) Determinare i valori di λ per cui si ottengono iperboli.

d) Determinare i valori di λ per cui si ottengono parabole.

e) Determinare i valori di λ per cui si ottengono iperboli equilateri.

f) Determinare l'equazione di eventuali rette tangenti a tutte le coniche del fascio.

Esercizio 5. a) Determinare l'espressione della proiezione che manda $(1, 0, 0)$ in $(3, -3, 3)$, $(0, 1, 0)$ in $(0, -1, 1)$, $(0, 0, 1)$ in $(1, -1, 0)$ e $(1, -1, 1)$ in $(1, 1, 0)$.

b) Determinare l'equazione della controimmagine della conica $\gamma': x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Cognome e nome

Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2009/2010 - Secondo compito in itinere

Esercizio 1. Si consideri la matrice A con a e k parametri reali

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & 2a+1 & k-5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare il valore di k per cui $\frac{\sqrt{7}-1}{3} e_3$ è autovettore associato all'autovalore $\lambda = 0$.

$$K = 5$$

Per tale valore di k

b) L'equazione caratteristica di A è:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2a\lambda^2 - (2a^2 + a)\lambda$$

c) I valori di a per cui A è triangolabile sono:

$$-1 \leq a \leq 0$$

d) I valori di a per cui A è diagonalizzabile sono:

$$-1 < a < 0$$

e) Dire se esistono valori di a per cui esiste una base ortonormale di autovettori.

$$a = -\frac{1}{2}$$

f) Posto $a = 0$, determinare r in modo tale che $\text{Im}(A^r) = \ker A$.

$$r = 2$$

Esercizio 2. a) L'equazione della circonferenza γ appartenente al piano $z = -4$, con centro sull'asse z e raggio 2 è:

$$\gamma: \begin{cases} z = -4 \\ x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \gamma: \begin{cases} z = -4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

b) L'equazione del cono C di vertice l'origine degli assi ed avente γ come direttrice.

$$C: 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$$

c) Scrivere l'equazione della sfera contenente γ e tangente internamente $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + (z+5)^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow \mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 20 = 0$$

Esercizio 3. a) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$\exp z = \sqrt{3} - i$$

$$z = \ln 2 + i \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \exp z = \sqrt{3} - i \\ \left(z - \ln 2 + \frac{13}{6} \pi i \right) (z - \ln 2 - 2i) \left(z - \ln 2 - \frac{11}{6} \pi i \right) = 0 \\ \operatorname{Im} z < -\frac{7}{6} \pi \end{cases}$$

$$z = \ln 2 - \frac{13}{6} \pi i$$

Esercizio 4. Si consideri il fascio di coniche generato da $\gamma_1: x^2 + 3(y+2)^2 - 12 = 0$ e da $\gamma_2: xy + y^2 + 4y = 0$ utilizzando per esso la rappresentazione $x^2 + 3(y+2)^2 - 12 + 2\lambda(xy + y^2 + 4y) = 0$.

a) Determinare i punti base del fascio.

$$(0;0) \text{ doppio}; (-3;-1); (0;-4)$$

b) Determinare le equazioni delle coniche degeneri del fascio.

$$\gamma_2: xy + y^2 + 4y = 0; \quad x(3y-x) = 0 \quad (\lambda = -3/2)$$

c) Determinare i valori di λ per cui si ottengono iperboli.

$$\lambda \in (-\infty; -3/2) \cup (-3/2; -1) \cup (3; +\infty)$$

d) Determinare i valori di λ per cui si ottengono parabole.

$$\lambda = -1; \quad \lambda = 3$$

e) Determinare i valori di λ per cui si ottengono iperboli equilateri.

$$\lambda = -2 \rightarrow x^2 - y^2 - 4xy - 4y = 0$$

f) Determinare l'equazione di eventuali rette tangenti a tutte le coniche del fascio.

$$y = 0$$

Esercizio 5. a) Determinare l'espressione della proiettività che manda $(1,0,0)$ in $(3,-3,3)$, $(0,1,0)$ in $(0,-1,1)$, $(0,0,1)$ in $(1,-1,0)$ e $(1,-1,1)$ in $(1,1,0)$.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Determinare l'equazione della controimmagine della conica $\gamma': x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$.

$$x_1^2 + x_2 x_3 = 0$$

Cognome e nome

Numero di matricola Email

INGEGNERIA MECCANICA: ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

I compitino, Febbraio 2009

Esercizio 1. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = -2k + 2 \\ x + y + kz = 0 \\ 2y + kz = k - 3 \end{cases}$$

1) determinare eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette una e una sola soluzione;

2) determinare eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema non ammette soluzione;

3) determinare eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette infinite soluzioni;

Esercizio 2. Si consideri al variare di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice :

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & h-1 \\ 1 & h & 1 & 1 \\ 2 & 2 & h & h \end{pmatrix}$$

a) si determini $\dim \operatorname{Im} T$ al variare di $h \in \mathbb{R}$;

b) si determini una base di $\operatorname{Im} T$ al variare di $h \in \mathbb{R}$;

c) per $h = 1$ si determini una base di $\operatorname{Ker} T$;

d) per $h = 1$ si trovino gli eventuali valori di α e β per cui $\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \text{Im } T$.

e) [FACOLTATIVA] Data l'applicazione $T'_h : \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ la cui matrice associata alle basi canoniche di $\mathbb{R}_3[t]$ e $\mathbb{R}_2[t]$ coincide con A_h , si scriva l'immagine del generico polinomio in $\mathbb{R}_3[t]$ tramite T'_h .

Esercizio 3. Si risolva la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^5 + (1 + i\sqrt{3})z^3 - 8z^2 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$$

Esercizio 4. Consideriamo il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$; si determini, se esiste,

l'equazione di un piano avente distanza $\sqrt{3}$ dal punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e contenente la retta passante per P e parallela a r .

Esercizio 5. Si determini un'eventuale applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva.

Esercizio 6. Si determini un'eventuale applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\text{Ker } T = \text{Span} \{e_1 - e_2 ; e_3\} \quad ; \quad \text{Im } T = \text{Span} \{w ; w'\}$$

dove $w = (123)^T$ e $w' = (001)^T$.

Soluzioni del Compitino del 21 Febbraio 2008 - A

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare dei parametri a e b reali

$$\begin{cases} ax + by - z = 0 \\ x + (a + 1)y + z = 0 \\ x + y + z = b - 2 \end{cases}$$

i). I valori dei parametri per cui esiste una ed una sola soluzione sono:

$$\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{a} + \mathbf{1}) \neq \mathbf{0} \ \forall \mathbf{b}}$$

ii). I valori dei parametri per cui esistono infinite soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{a} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{2}) \vee (\mathbf{a} = -\mathbf{1} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}) \vee (\mathbf{a} = -\mathbf{1} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{2})}$$

iii). I valori dei parametri per cui non esistono soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{a} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{2}) \vee (\mathbf{a} = -\mathbf{1} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{2})}$$

Esercizio 2. Si considerino al variare del parametro reale le matrici

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & s & -1 & 0 \\ 1 & s & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

i). trovare la dimensione di $\text{Im } A_s$ ed una base di $\text{Ker } A_s$ al variare del parametro s

$$\boxed{s \neq -\mathbf{3} \ \rho(\mathbf{A}_s) = \mathbf{4}, \ \rho(\mathbf{A}_{-\mathbf{3}}) = \mathbf{3}, \ \text{Ker}(\mathbf{A}_{-\mathbf{3}}) = \text{Span}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1})^T}$$

ii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono isomorfi sono

$$\boxed{\text{nessun valore di } s}$$

iii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono in somma diretta sono

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}}$$

Esercizio 3. Indichiamo con V_i l'insieme di matrici definito come

$$V_i = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}); A_i X = B_i\}$$

dove A_i e B_i sono definite come

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- i). Dire quanti e quali sono gli elementi di V_1 e V_2 ,

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3-z & -4-t \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2); \quad \mathbf{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -z & -t \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2)$$

- ii). dire se V_1 o V_2 sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e calcolarne eventuali basi

$$\mathbf{V}_1 \text{ no, } \mathbf{V}_2 \text{ si; } \mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4.

- i). Determinare i numeri complessi z tali che $\exp(z) = e^4(-\sqrt{3} + i)$

$$\mathbf{z}_k = 4 + \log 2 + i\pi \left(\frac{5}{6} + 2k \right) \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

- ii). tra le soluzioni dell'equazione precedente determinare quelle rappresentate da punti nel piano di Gauss distanti $\pi\sqrt{2}$ dalla retta di equazione

$$x + y - 4 - \log 2 - \frac{5\pi}{6} = 0$$

$$\mathbf{z}_1 = 4 + \log 2 + \frac{17\pi}{6}i; \quad \mathbf{z}_{-1} = 4 + \log 2 - \frac{7\pi}{6}i$$

Esercizio 5. In un riferimento dello spazio $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ sono dati la retta ed il piano di equazioni

$$r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \alpha: 2x + z - 1 = 0$$

ed il punto $P = (0, 0, 1)$ di α .

- i). le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r sul piano α è:

$$\mathbf{r}': \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

- ii). le equazioni della retta per P perpendicolare ed incidente ad r' sono:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z + 4 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- iii). le equazioni della circonferenza nel piano di centro il punto di intersezione di r ed r' e di raggio 1 sono:

$$\begin{cases} (x - 6/11)^2 + (y - 4/11)^2 + (z + 1/11)^2 - 1 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluzioni del Compitino del 21 Febbraio 2008 - B

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare dei parametri a e b reali

$$\begin{cases} bx - y + az = 0 \\ x + y + (b+1)z = 0 \\ x + y + z = a - 2 \end{cases}$$

i). I valori dei parametri per cui esiste una ed una sola soluzione sono:

$$\boxed{(\mathbf{b} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} \neq -\mathbf{1}) \wedge \forall \mathbf{a}}$$

ii). I valori dei parametri per cui esistono infinite soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{b} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{2}) \vee (\mathbf{b} = -\mathbf{1} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{2}) \vee (\mathbf{b} = -\mathbf{1} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0})}$$

iii). I valori dei parametri per cui non esistono soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{b} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{2}) \vee (\mathbf{b} = -\mathbf{1} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{2})}$$

Esercizio 2. Si considerino al variare del parametro reale le matrici

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ s & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

i). trovare la dimensione di $\text{Im } A_s$ ed una base di $\text{Ker } A_s$ al variare del parametro s

$$\boxed{s \neq \mathbf{1}, \rho(\mathbf{A}_s) = \mathbf{4}, \rho(\mathbf{A}_1) = \mathbf{3}, \text{Ker}(\mathbf{A}_1) = \text{Span}(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^T}$$

ii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono isomorfi sono

$$\boxed{\text{nessun valore di } s}$$

iii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono in somma diretta sono

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}}$$

Esercizio 3. Indichiamo con V_i l'insieme di matrici definito come

$$V_i = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}); A_i X = B_i\}$$

dove A_i e B_i sono definite come

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- i). Dire quanti e quali sono gli elementi di V_1 e V_2 ,

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5-z & 1-t \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2); \quad \mathbf{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -z & -t \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2)$$

- ii). dire se V_1 o V_2 sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e calcolarne eventuali basi

$$\mathbf{V}_1 \text{ no, } \mathbf{V}_2 \text{ si; } \mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4.

- i). Determinare i numeri complessi z tali che $\exp(z) = e(i-1)$

$$\mathbf{z}_k = 1 + \frac{1}{2} \log 2 + i\pi \left(\frac{3}{4} + 2k \right) \quad \text{per } k \in \mathbf{Z}$$

- ii). tra le soluzioni dell'equazione precedente determinare quelle rappresentate da punti nel piano di Gauss distanti $\pi\sqrt{2}$ dalla retta di equazione

$$x + y - 1 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\mathbf{z}_1 = 1 + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{11\pi}{4} i; \quad \mathbf{z}_{-1} = 1 + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{5\pi}{4} i$$

Esercizio 5. In un riferimento dello spazio $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ sono dati la retta ed il piano di equazioni

$$r: \begin{cases} x - y - z = -1 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \alpha: x + 2y - 1 = 0$$

ed il punto $P = (1, 0, 0)$ di α .

- i). le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r sul piano α è:

$$\mathbf{r}': \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

- ii). le equazioni della retta per P perpendicolare ed incidente ad r' sono:

$$\begin{cases} -4x + 2y + 5z + 4 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- iii). le equazioni della circonferenza nel piano di centro il punto di intersezione di r ed r' e di raggio 1 sono:

$$\begin{cases} (x + 1/11)^2 + (y - 6/11)^2 + (z - 4/11)^2 - 1 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluzioni del Compitino del 21 Febbraio 2008 - C

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare dei parametri a e b reali

$$\begin{cases} x + by + z = 0 \\ (b-1)x + (a+1)y - z = 0 \\ x + y + z = a - 1 \end{cases}$$

i). I valori dei parametri per cui esiste una ed una sola soluzione sono:

$$\boxed{(\mathbf{b} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{1}) \forall \mathbf{a}}$$

ii). I valori dei parametri per cui esistono infinite soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{b} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{1}) \vee (\mathbf{b} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{1}) \vee (\mathbf{b} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{1})}$$

iii). I valori dei parametri per cui non esistono soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{b} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{1}) \vee (\mathbf{b} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{1}) \vee (\mathbf{b} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} \neq -\mathbf{1})}$$

Esercizio 2. Si considerino al variare del parametro reale le matrici

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & s & 0 \end{pmatrix};$$

i). trovare la dimensione di $\text{Im } A_s$ ed una base di $\text{Ker } A_s$ al variare del parametro s

$$\boxed{s \neq \mathbf{1}, \rho(\mathbf{A}_s) = \mathbf{4}, \rho(\mathbf{A}_1) = \mathbf{3}, \text{Ker}(\mathbf{A}_1) = \text{Span}(\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^T}$$

ii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono isomorfi sono

$$\boxed{\text{nessun valore di } s}$$

iii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono in somma diretta sono

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}}$$

Esercizio 3. Indichiamo con V_i l'insieme di matrici definito come

$$V_i = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}); A_i X = B_i\}$$

dove A_i e B_i sono definite come

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- i). Dire quanti e quali sono gli elementi di V_1 e V_2 ,

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z-2 & t-1 \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2); \quad \mathbf{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -z & -t \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2)$$

- ii). dire se V_1 o V_2 sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e calcolarne eventuali basi

$$\mathbf{V}_1 \text{ no, } \mathbf{V}_2 \text{ si; } \mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4.

- i). Determinare i numeri complessi z tali che $\exp(z) = e^2(1 - i\sqrt{3})$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{2} + \log \mathbf{2} + i\pi \left(\mathbf{2k} - \frac{1}{3} \right) \quad \text{per } \mathbf{k} \in \mathbf{Z}$$

- ii). tra le soluzioni dell'equazione precedente determinare quelle rappresentate da punti nel piano di Gauss distanti $\pi\sqrt{2}$ dalla retta di equazione

$$x + y - 2 - \log 2 + \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{2} + \log \mathbf{2} - \frac{7\pi}{3}i; \quad \mathbf{z}_{-1} = \mathbf{2} + \log \mathbf{2} + \frac{5\pi}{3}i$$

Esercizio 5. In un riferimento dello spazio $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ sono dati la retta ed il piano di equazioni

$$r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \alpha: y + 2z - 1 = 0$$

ed il punto $P = (0, 1, 0)$ di α .

- i). le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r sul piano α è:

$$\mathbf{r}': \begin{cases} z - 2x - 2y = 0 \\ 2z + y - 1 = 0 \end{cases}$$

- ii). le equazioni della retta per P perpendicolare ed incidente ad r' sono:

$$\begin{cases} 2z + 5x - 4y + 4 = 0 \\ 2z + y - 1 = 0 \end{cases}$$

- iii). le equazioni della circonferenza nel piano di centro il punto di intersezione di r ed r' e di raggio 1 sono:

$$\begin{cases} (x - 4/11)^2 + (y + 1/11)^2 + (z - 6/11)^2 - 1 = 0 \\ 2z + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluzioni del Compitino del 21 Febbraio 2008 - D

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare dei parametri a e b reali

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ (a-1)x + (b-1)y - z = 0 \\ x + y + z = b-1 \end{cases}$$

i). I valori dei parametri per cui esiste una ed una sola soluzione sono:

$$\boxed{(\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{1}) \wedge \forall \mathbf{b}}$$

ii). I valori dei parametri per cui esistono infinite soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{a} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{1}) \vee (\mathbf{a} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{1})}$$

iii). I valori dei parametri per cui non esistono soluzioni sono:

$$\boxed{(\mathbf{a} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{1}) \vee (\mathbf{a} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{1})}$$

Esercizio 2. Si considerino al variare del parametro reale le matrici

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & s \\ 1 & 1 & 0 & s \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

i). trovare la dimensione di $\text{Im } A_s$ ed una base di $\text{Ker } A_s$ al variare del parametro s

$$\boxed{s \neq 2, \rho(\mathbf{A}_s) = 4, \rho(\mathbf{A}_2) = 3, \text{Ker}(\mathbf{A}_2) = \text{Span}(-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^T}$$

ii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono isomorfi sono

$$\boxed{\text{nessun valore di } s}$$

iii). i valori, se esistono, del parametro s per cui $\text{Ker } A_s$ ed $\text{Im } A_s$ sono in somma diretta sono

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}}$$

Esercizio 3. Indichiamo con V_i l'insieme di matrici definito come

$$V_i = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}); A_i X = B_i\}$$

dove A_i e B_i sono definite come

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- i). Dire quanti e quali sono gli elementi di V_1 e V_2 ,

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z+2 & t+3 \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2); \quad \mathbf{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -z & -t \\ z & t \end{pmatrix} : \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\infty^2)$$

- ii). dire se V_1 o V_2 sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e calcolarne eventuali basi

$$\mathbf{V}_1 \text{ no, } \mathbf{V}_2 \text{ si; } \mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4.

- i). Determinare i numeri complessi z tali che $\exp(z) = e^3(1+i)$

$$\mathbf{3} + \frac{1}{2} \log \mathbf{2} + \mathbf{i}\pi \left(\frac{9}{4} + \mathbf{2k} \right) \text{ per } \mathbf{k} \in \mathbf{Z}$$

- ii). tra le soluzioni dell'equazione precedente determinare quelle rappresentate da punti nel piano di Gauss distanti $\pi\sqrt{2}$ dalla retta di equazione

$$x + y - 3 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{9\pi}{4} = 0$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{3} + \frac{1}{2} \log \mathbf{2} + \frac{17\pi}{4} \mathbf{i}; \quad \mathbf{z}_{-1} = \mathbf{3} + \frac{1}{2} \log \mathbf{2} + \frac{\pi}{4} \mathbf{i}$$

Esercizio 5. In un riferimento dello spazio $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ sono dati la retta ed il piano di equazioni

$$r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \alpha: x + 2y - 1 = 0$$

ed il punto $P = (1, 0, 0)$ di α .

- i). le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r sul piano α è:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

- ii). le equazioni della retta per P perpendicolare ed incidente ad r' sono:

$$\begin{cases} 4(x - 1) - 2y + 5z = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

- iii). le equazioni della circonferenza nel piano di centro il punto di intersezione di r ed r' e di raggio 1 sono:

$$\begin{cases} (x - 1/11)^2 + (y + 6/11)^2 + (z - 4/11)^2 - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluzioni del compitino del 21 Aprile 2007 - 1 - Matematica II

Ingegneria meccanica

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ky - (k+2)z = 1 \\ x + 2ky + 4kz = 1/2 \\ (2k+1)x + 2ky = 1/2 \end{cases}$$

- (a) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione.

$$\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{k} \neq -\mathbf{1}$$

- (b) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema non ammette soluzioni.

$$\mathbf{k} = -\mathbf{1}$$

- (c) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni.

$$\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni lineari $T_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ aventi come matrice associata rispetto alle rispettive basi canoniche

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & 2b \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare al variare di a e b i valori della dimensione di $\text{Im}A$.

$$\mathbf{b} \neq \mathbf{0} \wedge \forall \mathbf{a} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{3} : \mathbf{b} = \mathbf{0} \wedge \forall \mathbf{a} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{2}$$

- (b) Dare eventuali valori di a e b per cui T è surgettiva e motivare la risposta.

$$\text{Mai: } \mathbf{3} = \dim \text{Im } \mathbf{T} + \dim \ker \mathbf{T} \Rightarrow \dim \text{Im } \mathbf{T} \leq \mathbf{3}$$

- (c) Per $b = 1$ dare eventuali valori di a per cui $v = (2, 2, 0, a)^T$ appartiene ad $\text{Im}A$

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

- (d) Per $a \neq 0$ e $b = 1$ dare un eventuale sottospazio sommando diretto di $\text{Im}A$ in $\mathbb{R}^4$

$$\text{Im } \mathbf{T} \oplus \text{Span}(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{a}) = \mathbb{R}^4$$

- (e) Dire se esistono U e W sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(U \cap W) = 1$ e motivare la risposta.

$$\text{No: } \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \mathbf{5}$$

Esercizio 3. Posto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = A^2 - B^2, \quad D = (A+B)(A-B)$$

- (a) Scrivere C e D e verificare se $C = D$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

- (b) Dati A e B qualunque è sempre vero che $C = D$? Motivare le risposte.

$$\text{No: basta prendere } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione complessa $(z+1)^6 = 1$. Tra le soluzioni trovate indicare quello che hanno modulo massimo e minimo e calcolare i rispettivi moduli.

$$\mathbf{z_0 = 0, \ z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \ z_2 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \ z_3 = -2, \ z_4 = -\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}, \ z_5 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \ \min: \mathbf{z_0}, \ \max: |\mathbf{z_3}| = 2}$$

Esercizio 5. Sono dati due piani ed una retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\alpha: x - 2y + z - 1 = 0, \ \alpha': x + y - 2z + 2 = 0, \ \ r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta r e tangenti ai piani α ed α' .

$$\mathbf{C_1 = (-1, 1, -2), \ R_1 = \sqrt{6}, \ C_2 = (1, 0, 1), \ R_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(b) Scrivere l'equazione del piano β passante per la retta di intersezione $s = \alpha \cap \alpha'$ e parallelo ad r .

$$\beta: \mathbf{12x - 3y - 9z + 9 = 0}$$

Esercizio 6.

(a) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(0, 1)$; determinare a tale che $P(X < a) = 0.03$.

$$\mathbf{a = -1.88}$$

(b) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(2, 4)$; determinare $P(|X| > 2)$.

$$\mathbf{0.5228}$$

(c) Da una popolazione è estratto il campione

$$5,9 \quad 6,2 \quad 6,1 \quad 5,8 \quad 6,0$$

calcolare gli stimatori per la media e per la varianza della popolazione.

$$\mathbf{\bar{x} = 6, \ s^2 = 0.025}$$

Soluzioni del compitino del 21 Aprile 2007 - 2 - Matematica II

Ingegneria meccanica

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (2k+1)y + 2kz = 1/2 \\ (k+2)x + kz = 1 \\ 4x + ky + 2kz = 2 \end{cases}$$

- (a) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione.

$$\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{k} \neq \mathbf{1}$$

- (b) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema non ammette soluzioni.

$$\mathbf{k} = \mathbf{1}$$

- (c) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni.

$$\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazione lineari $T_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ aventi come matrice associata rispetto alle rispettive basi canoniche

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & b & 2a \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare al variare di a e b la dimensione di $\text{Im}T$.

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \wedge \forall \mathbf{b} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{3} : \mathbf{a} = \mathbf{0} \wedge \forall \mathbf{b} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{2}$$

- (b) Dare eventuali valori di a e b per cui T è surgettiva e motivare la risposta

$$\text{Mai: } \mathbf{3} = \dim \text{Im } \mathbf{T} + \dim \ker \mathbf{T} \Rightarrow \dim \text{Im } \mathbf{T} \leq \mathbf{3}$$

- (c) Per $a = 1$ dare eventuali valori di b per cui il vettore $(2, 2, 0, b)$ appartiene ad $\text{Im}T$

$$\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

- (d) Per $b \neq 0$ ad $a = 1$ dare un eventuale sottospazio sommando diretto di $\text{Im}T$ in $\mathbb{R}^4$.

$$\text{Im } \mathbf{T} \oplus \text{Span}(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{b}) = \mathbb{R}^4$$

- (e) Dire se esistono U e W sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(U \cap W) = 1$ e motivare la risposta.

$$\text{No: } \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \mathbf{5}$$

Esercizio 3. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = A^2 - B^2 \quad D = (A+B)(A-B)$$

- (a) Scrivere C e D e verificare se $C = D$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}$$

- (b) Dati A e B qualunque è sempre vero che $C = D$? Motivare le risposte

$$\text{No: basta prendere } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione complessa $(z-1)^6 = 1$. Tra le soluzioni trovate indicare quelle che hanno massimo e minimo modulo e calcolare i rispettivi moduli.

$$\mathbf{z_0 = 2, \ z_1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}, \ z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \ z_3 = 0, \ z_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \ z_5 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}, \ \min: \mathbf{z_3}, \ \max: |\mathbf{z_0}| = 2}$$

Esercizio 5. Sono dati due piani ed una retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\alpha: x + y - 2z - 1 = 0, \ \alpha': -2x + y + z + 2 = 0, \quad r: \begin{cases} x &= 1 - 3t \\ y &= 1 - t \\ z &= 2 - t \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta r e tangenti ai piani α ed α' .

$$\mathbf{C_1 = (1, 1, 2), \ R_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \ C_2 = (4, 2, 3), \ R_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(b) Scrivere l'equazione del piano β passante per la retta di intersezione $s = \alpha \cap \alpha'$ e parallelo ad r .

$$\beta: \mathbf{y - z = 0}$$

Esercizio 6.

(a) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(0, 1)$; determinare a tale che $P(X < a) = 0.33$.

$$\mathbf{a = -0.44}$$

(b) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(1, 9)$; determinare $P(|X| > 1)$.

$$\mathbf{0.7514}$$

(c) Da una popolazione è estratto il campione

$$6, 0 \quad 6, 1 \quad 5, 8 \quad 5, 7 \quad 6, 4$$

calcolare gli stimatori per la media e per la varianza della popolazione.

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{6}, \ \mathbf{s^2 = 0.075}$$

Soluzioni del compitino del 21 Aprile 2007 - 3 - Matematica II

Ingegneria meccanica

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ky + (k+2)z = -2 \\ x - 2ky + kz = -1 \\ (k-1)x + 2ky = 1 \end{cases}$$

- (a) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione.

$$\boxed{\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{k} \neq -1}$$

- (b) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema non ammette soluzioni.

$$\boxed{\mathbf{k} = -1}$$

- (c) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni.

$$\boxed{\mathbf{k} = \mathbf{0}}$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni lineari $T_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ aventi come matrice associata rispetto alle rispettive basi canoniche

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & b+2 & 2(a-2) \\ 1 & 2 & b+2 \\ 0 & 1 & 2-a \\ 0 & b+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare al variare di a e b i valori della dimensione di $\text{Im} A$.

$$\boxed{\mathbf{a} \neq \mathbf{2} \wedge \forall \mathbf{b} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{3} : \mathbf{a} = \mathbf{2} \wedge \forall \mathbf{b} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{2}}$$

- (b) Dare eventuali valori di a e b per cui T è surgettiva e motivare la risposta.

$$\boxed{\text{Mai: } \mathbf{3} = \dim \text{Im } \mathbf{T} + \dim \ker \mathbf{T} \Rightarrow \dim \text{Im } \mathbf{T} \leq \mathbf{3}}$$

- (c) Per $a = 3$ dare eventuali valori di b per cui $v = (2, 2, 0, b+2)^T$ appartiene ad $\text{Im} T$.

$$\boxed{\mathbf{b} = -2}$$

- (d) Per $b \neq -2$ e $a = 3$ dare un eventuale sottospazio sommando diretto di $\text{Im} T$ in $\mathbb{R}^4$.

$$\boxed{\text{Im } \mathbf{T} \oplus \text{Span}(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{b} + \mathbf{2}) = \mathbb{R}^4}$$

- (e) Dire se esistono U e W sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(U \cap W) = 1$.

$$\boxed{\text{No: } \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \mathbf{5}}$$

Esercizio 3. Posto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A^2 - B^2, \quad D = (A+B)(A-B)$$

- (a) scrivere C e D e verificare se $C = D$.

$$\boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 16 & -15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -15 & 18 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

- (b) Dati A e B qualunque è sempre vero che $C = D$? Motivare la risposta.

$$\boxed{\text{No: basta prendere } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione complessa $(z + 1)^6 = -1$. Tra le soluzioni indicare quelle che hanno modulo massimo e minimo e calcolarne i rispettivi moduli.

$$\mathbf{z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{i}{2}, \mathbf{z_1 = -1 + i, \mathbf{z_2 = - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{i}{2}, \mathbf{z_3 = - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{i}{2}, \mathbf{z_4 = -1 - i, \mathbf{z_5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) - \frac{i}{2}}}$$

$$\min: |\mathbf{z_0}|^2 = |\mathbf{z_5}|^2 = \mathbf{2 - \sqrt{3}} \quad \max: |\mathbf{z_2}|^2 = |\mathbf{z_3}|^2 = \mathbf{2 + \sqrt{3}}$$

Esercizio 5. Sono dati due piani ed una retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\alpha: -2x + y + z - 1 = 0, \quad \alpha': x - 2y + z + 2 = 0, \quad r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta r e tangenti ai piani α ed α' .

$$\mathbf{C_1 = (1, -2, -1), \mathbf{R_1 = \sqrt{6}, \mathbf{C_2 = (3, 4, -5), \mathbf{R_2 = \frac{4\sqrt{6}}{3}}}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano β passante per la retta di intersezione $s = \alpha \cap \alpha'$ e parallelo ad r .

$$\beta: \mathbf{-5x + 3y + 2z - 3 = 0}$$

Esercizio 6.

(a) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(0, 1)$; determinare a tale che $P(X < a) = 0.09$.

$$\mathbf{a = -1.34}$$

(b) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(2, 9)$; determinare $P(|X| > 2)$.

$$\mathbf{0.5918}$$

(c) Da una popolazione è estratto il campione

$$5, 7 \quad 6, 1 \quad 5, 9 \quad 6, 2 \quad 6, 1$$

calcolare gli stimatori per la media e per la varianza della popolazione.

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{6}, \mathbf{s^2 = 0.04}$$

Soluzioni del compitino del 21 Aprile 2007 - 4 - Matematica II

Ingegneria meccanica

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ky + (3 - k)z = 3/2 \\ 2x - ky + kz = -1 \\ (k - 2)x + ky = 1 \end{cases}$$

- (a) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione.

$$\boxed{k \neq 0 \wedge k \neq 1}$$

- (b) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema non ammette soluzioni.

$$\boxed{k = 1}$$

- (c) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni.

$$\boxed{k = 0}$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni lineari $T_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ aventi come matrice associata rispetto alle rispettive basi canoniche

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & 2(b-1) \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -(b-1) \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare al variare di a e b i valori della dimensione di $\text{Im}T$.

$$\boxed{\mathbf{b} \neq \mathbf{1} \wedge \forall \mathbf{a} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{3} : \mathbf{b} = \mathbf{1} \wedge \forall \mathbf{a} \text{ rg } \mathbf{A} = \mathbf{2}}$$

- (b) Dare eventuali valori di a e b per cui T è surgettiva e motivare la risposta.

$$\boxed{\text{Mai: } \mathbf{3} = \dim \text{Im } \mathbf{T} + \dim \ker \mathbf{T} \Rightarrow \dim \text{Im } \mathbf{T} \leq \mathbf{3}}$$

- (c) Per $b = 2$ dare eventuali valori di a per cui $v = (2, 2, 0, a)^T$ appartiene ad $\text{Im}T$.

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{0}}$$

- (d) Per $a \neq 0$ e $b = 2$ dare un eventuale sottospazio sommando diretto di $\text{Im}T$ in $\mathbb{R}^4$.

$$\boxed{\text{Im } \mathbf{T} \oplus \text{Span}(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{a}) = \mathbb{R}^4}$$

- (e) Dire se esistono U e W sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(U \cap W) = 1$.

$$\boxed{\text{No: } \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \mathbf{5}}$$

Esercizio 3. Posto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = A^2 - B^2, \quad D = (A + B)(A - B)$$

- (a) scrivere C e D e verificare che $C = D$.

$$\boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -24 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- (b) Dati A e B qualunque è sempre vero che $C = D$? Motivare le risposte.

$$\boxed{\text{No: basta prendere } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione $(z - 2)^6 = 1$. Indicare tra le soluzioni quelle di massimo e minimo modulo e calcolarne i rispettivi moduli.

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{3}, \mathbf{z}_1 = \frac{5}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \mathbf{z}_2 = \frac{3}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \mathbf{z}_3 = \mathbf{1}, \mathbf{z}_4 = \frac{3}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \mathbf{z}_5 = \frac{5}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \min: |\mathbf{z}_3| = \mathbf{1}, \quad \max: |\mathbf{z}_0| = \mathbf{3}$$

Esercizio 5. Sono dati due piani ed una retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\alpha: x - 2y + z - 1 = 0, \quad \alpha': -2x + y + z + 2 = 0, \quad r: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta r e tangenti ai piani α ed α' .

$$\mathbf{C}_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}), \quad \mathbf{R}_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \mathbf{C}_2 = (\mathbf{5/2}, \mathbf{3/2}, \mathbf{2}), \quad \mathbf{R}_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

(b) Scrivere l'equazione del piano β passante per la retta di intersezione $s = \alpha \cap \alpha'$ e parallelo ad r .

$$\beta: \mathbf{3x} + \mathbf{y} - \mathbf{4z} - \mathbf{3} = \mathbf{0}$$

Esercizio 6.

(a) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(0, 1)$; determinare a tale che $P(X < a) = 0.24$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{-0.71}$$

(b) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(1, 4)$; determinare $P(|X| > 1)$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{0.6587}$$

(c) Da una popolazione è estratto il campione

$$6, 2 \quad 5, 8 \quad 5, 9, \quad 6, 2 \quad 5, 9$$

calcolare gli stimatori per la media e per la varianza della popolazione.

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{6}, \quad \mathbf{s}^2 = \mathbf{0.035}$$

Soluzioni del compitino B - 21 Aprile 2007

Soluzione 1.

- a) Calcolando il determinante della matrice del sistema col metodo di Sarrus si ha

$$\det \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2k+1 & 2k & 0 & 2k+1 \\ k+2 & 0 & k & k+2 & 0 \\ 4 & k & 2k & 4 & k \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= 0 + 4k(2k+1) + 2k^2(k+2) - 2k(k+2)(2k+1) \\ &= 2k^2(1-k) \end{aligned}$$

dunque, il sistema ammette una soluzione unica per $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

- b) Per $k = 0$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

dunque il sistema ammette infinite soluzioni.

- c) Per $k = 1$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

mediante le trasformazioni elementari $R_2 \rightarrow 4R_2 - 3R_3$, $R_1 \rightarrow R_1 + R_2$ e $R_1 \leftrightarrow R_3$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array} \right)$$

e, dall'ultima riga, è chiaro che il sistema non ammette soluzione.

Soluzione 2. Per calcolare il rango di $T_{a,b}$ andiamo a vedere i determinanti delle due sottomatrici quadrate di ordine tre. Utilizzando lo sviluppo di Laplace si ha

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & b & 2a \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} b & 2a \\ 1 & -a \end{pmatrix} = a(b+2) \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix} = ab \end{aligned}$$

dunque per $a = 0$ il rango della matrice è 2, per $a \neq 0$ il rango è tre. L'applicazione non è mai surgettiva; infatti dal teorema della dimensione

$$3 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T \leq 3.$$

Quando $a = 1$ il rango di $T_{1,b}$ è massimo, come abbiamo visto in precedenza. Utilizziamo il teorema di Rouché-Capelli e calcoliamo il determinante della matrice $T' = (T|v)$;

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 2 & 2 \\ 1 & 2 & b & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & b & 0 & b \end{array} \right) = -\det \left(\begin{array}{ccc} b & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{array} \right) = b^2$$

dunque per $b = 0$ si ha $\text{rg} T' = \text{rg} T$, dunque $v \in \text{Im} T$. Se $b \neq 0$ allora $v \in \text{Im} T$, dunque

$$\mathbb{R}^4 = \text{Im} T \oplus \text{Span}(v).$$

Per l'ultima parte dell'esercizio basta applicare il teorema della dimensione. Se esistessero U e W di dimensione tre, con intersezione di dimensione 1 avremmo $Z = U + W$ e

$$\dim Z = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3 + 3 - 1 = 5$$

cioè un sottospazio di dimensione cinque $\mathbb{R}^4$.

Soluzione 3. Si ha $D = (A + B)(A - B) = A(A - B) + B(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$. Dunque $C = D$ se e soltanto se A e B commutano e si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

per trovare casi in cui $C \neq D$ basta trovare una coppia di matrici A' e B' che non commutano, ad esempio

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione 4. Sostituendo $w = z - 1$ possiamo risolvere l'equazione complessa $w^6 = 1$ le cui soluzioni sono le radici seste dell'unità, dunque abbiamo

$$z_k = \left(1 + \cos \frac{k\pi}{3} \right) + i \sin \frac{k\pi}{3};$$

dunque, per $0 \leq k \leq 5$ abbiamo

$$\begin{array}{ll} z_0 = 2 & z_3 = 0 \\ z_1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} & z_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} & z_5 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

dunque si hanno le soluzioni di modulo minimo e massimo

$$\min: z_3, |z_3| = 0, \quad \max: z_0, |z_0| = 2$$

Soluzione 5. I centri delle sfere sulla retta r hanno la stessa distanza dai due piani, dunque basta imporre

$$\text{dist}(C_t, \alpha)^2 = \text{dist}(C_t, \alpha')^2;$$

dato un generico punto $(1 - 3t, 1 - t, 2 - t)$ i quadrati delle distanze sono

$$\frac{|2t + 3|}{\sqrt{6}} = \frac{|4t + 3|}{\sqrt{6}}$$

le cui soluzioni sono $t_1 = 0$ e $t_2 = -1$. In corrispondenza di questi valori si hanno circonferenze e raggi

$$C_1 = (1, 1, 2), \quad R_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad C_2 = (4, 2, 3), \quad R_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Osserviamo che il piano α' , così come α , non è parallelo ad r , infatti si ha

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{r} = (-2, 1, 1) \cdot (-3, -1, -1)^T = 6 - 1 - 1 = 4 \neq 0,$$

dunque, andando a cercare il piano β , nel fascio di piani della retta r , possiamo escludere α' , cioè eliminare un parametro. Definiamo

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= \alpha + \lambda \alpha' = x + y - 2z - 1 + \lambda(-2x + y + z + 2) \\ &= (1 - 2\lambda)x + (\lambda + 1)y + (\lambda - 2)z + 2\lambda - 1 \end{aligned}$$

ed imponiamo la condizione di parallelismo

$$0 = \vec{n}_{\alpha_\lambda} \cdot \vec{r} = -3(1 - 2\lambda) - \lambda - 1 - \lambda + 2 = -3 + 6\lambda - \lambda - 1 - \lambda + 2 = 4\lambda - 2$$

dunque il piano β cercato è $\alpha_{1/2}$, di equazione $y - z = 0$.

Soluzione 6. Per definizione $P(X < a)$ è la funzione di ripartizione della legge di X e si ha $F(a) = 0.33$, dunque

$$F(-a) = 1 - F(a) = 0.67 \Rightarrow -a = 0.44$$

dunque $a = -0.44$. Per quanto riguarda il punto b) sia F la funzione di distribuzione della variabile X . Si ha

$$\begin{aligned} P(|X| > 1) &= P(X > 1) + P(X < -1) = 1 - F(-1) - F(1) \\ &= 1 + F_{0,1}(-2/3) - F_{0,1}(0) = 1/2 = 3/2 - F_{0,1}(2/3) \\ &= 1.5 - F_{0,1}(0.6700) = 0.7514. \end{aligned}$$

Scriviamo di seguito gli stimatori della media e della varianza

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 6 \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16}{4} = 0.075. \end{aligned}$$

COGNOME e NOME:
CORSO DI LAUREA:
NUMERO DI MATRICOLA:
ANNO DI IMMATRICOLAZIONE:

Ingegneria Meccanica: Matematica II

I compitino del 30-03-2006

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - kz = -k \\ (k+2)x + ky - z = -1 \\ ky - z = -k \end{cases}$$

- (a) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione.

- (b) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema non ammette soluzioni.

- (c) Determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni.

Esercizio 2. Si considerino le applicazione lineari $T_h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aventi come matrice associata rispetto alle rispettive basi canoniche

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare al variare di h una base di $\text{Im} f$, la dimensione di $\text{Im} f$ e la dimensione di $\text{Ker} f$.

- (b) Se si considera, per $h = 1$ A_1 come matrice associata all'applicazione lineare $T_1 : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alle rispettive basi canoniche,¹ posto $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v = (1, 0, 1)$ calcolare $T_1(B)$ e $T_1^{-1}(v)$.

¹Per base canonica di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ si intende $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

Esercizio 3. Risolvere l'equazione complessa $z^4|z|^2 - 4z^4 + (+1 - \sqrt{3}i)|z|^2 = 4 - 4\sqrt{3}i$

Esercizio 4.

Si scrivano:

- (a) l'equazione del piano π passante per la retta r

$$r : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -1 - 2t \\ z &= t \end{cases}$$

e per il punto $P = (1, 1, -2)^T$

- (b) l'equazione della sfera S tangente al piano π nel punto $T = (-1, 1, -1)^T$ e passante per $Q = (1, -1, 1)^T$.
(c) le coordinate del centro ed il raggio della circonferenza che si ottiene intersecando S con il piano di equazione $2x + 7y + 5z = 0$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(1, 4)$

- (a) Calcolare la probabilità che X assuma valori maggiori di $-\frac{1}{2}$.
(b) Calcolare la probabilità che sia $|X - 2| < 5$
(c) Calcolare a in modo che sia soddisfatta la relazione $P(-1 < X < a) = 0,3493$.