Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.1 del 2010

Esercizio 1. Discutere il seguente sistema reale

$$\begin{cases} h\,x + y + h\,z = h \\ 2\,x + (1-h)\,z = 3\,h \\ 2\,h\,x + y + h\,z = h - h^2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Risolvere

$$\exp^2 z + (-1 + i\sqrt{3})\exp z + |z|\left(\exp^2 z + (-1 + i\sqrt{3})\exp z\right) = 0$$

Esercizio 3. Determinare le equazioni delle eventuali sfere tangenti al piano $\pi : x + y + z = 0$ nell'origine e intersecanti il piano $\alpha : x - y + z + 1 = 0$ in una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice reale A

$$A = \begin{pmatrix} h & h-2 & 0 \\ 1 & h-2 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ si studi:
a) la triangolabilità di A
b) la diagonalizzabilità di A
b) la dimensione di $\mathrm{Im}(A)$.

Esercizio 5. Determinare l'equazione del fascio di coniche tangenti alla retta $x - 2\,y = 1$ nel punto $A(1\,;\,0)$ e passanti per i punti $B(3\,;\,0)$ e $C(1\,;\,-4)$. Si dica se esistono parabole nel fascio.

Esercizio 6. Sono assegnate in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ le rette $r_1 : x_1 = 0$, $r_2 : x_2 = 0$, $r_3 : x_3 = 0$ e il punto $P(1, 5, -2)$. Determinare la proiettività φ di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\varphi(r_1) = r_2 \quad ; \quad \varphi(r_2) = r_3 \quad ; \quad \varphi(r_3) = r_1 \quad ; \quad \varphi(P) = (-2, 1, 40)\ .$$

Si determinino i punti fissi di φ.

Esercizio 6 bis

• In un campione di 80 sfere prodotte da una ditta A si calcola un diametro medio $\bar{x}_A = 8$ mm ed uno scarto quadratico $s_A = 0,7$ mm. In un altro campione di 42 sfere prodotte da una ditta B si misura un diametro medio di $\bar{x}_B = 7,5$ mm ed uno scarto quadratico $s_B = 0,4$ mm. Determinare se, a livello di confidenza del 5 %, ci siano elementi per ritenere le due medie diverse.

• Se una popolazione X con distribuzione gaussiana ha media μ e varianza σ^2, quali si possono ritenere la media e la varianza della variabile $\overline{X}$, calcolata su un campione molto numeroso? Dare un traccia della spiegazione.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.2 del 2010

Esercizio 1. Studiare, al variare del parametro reale h, la mutua posizione dei seguenti tre piani:

$$(1+h)\,x-2\,y+(1-h)\,z=2\ \ ;\ \ (h-1)\,y+(1-h)\,z=2\ \ ;\ \ x-h\,y-z=-1\ .$$

Esercizio 2. a) Risolvere l'equazione

$$\exp(z)\exp^2(2\,z)+2\exp(z)\exp(2\,z)+\exp(z)=0\ .$$

b) Tra le soluzioni z trovate al punto a) determinare quelle per cui $0<d(z,z_0)\leq 2\,\pi$ con $z_0=\dfrac{\pi}{2}\,i$.

Esercizio 3. a) Si scrivano le equazioni dei piani contenenti la retta $r: x-3\,y-z-2=x-z+1=0$ e tangenti la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-4\,x+2\,y+2=0$.
b) Si determini il luogo dei centri delle sfere tangenti i piani individuati al punto a) dandone le equazioni.

Esercizio 4. Si consideri la matrice reale A

$$A=\begin{pmatrix} 2\,h & 1 & 2-h \\ -1 & h & 1 \\ 2-h & 1 & 2\,h \end{pmatrix}$$

a) studiare triangolabilità e diagonalizzabilità al variare di h;
b) per $h=0$ dare una base di autovettori;
c) determinare gli eventuali valori di h per cui esistono matrici B non nulle tali che $AB=0$.

Esercizio 5. a) Si scrivano le equazioni dell'ellisse γ_1 e dell'iperbole γ_2 aventi lo stesso centro $C(3,3)$, assi paralleli agli assi coordinati e semiassi di lunghezza $a=2$ e $b=1$;
b) si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ generato dalle coniche γ_1 e γ_2, individuandone le coniche degeneri;
c) determinare gli eventuali elementi di simmetria comuni a tutte le coniche del fascio;
d) dato il punto $Q(\alpha\,,\,\beta)$, si diano delle limitazioni per α e β affinché la conica del fascio $\mathcal{F}$ passante per Q sia un'iperbole.

Esercizio 6. Sono assegnate le proiettività φ_1 e φ_2 di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ rappresentate dalle matrici seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\quad,\quad\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}\ ;$$

determinare gli eventuali punti fissi comuni ad entrambe le proiettività.

Esercizio 6 bis *a*) Per una variabile con distribuzione normale con media incognita e deviazione standard $\sigma=2$, si raccoglie un campione di 10 dati, che forniscono $\overline{x}=18.58$. Si verifichi l'ipotesi $H_0)\ \mu=20$, contro l'ipotesi alternativa $H_1)\ \mu\neq 20$, al livello di significatività del 5%.
b) Sia $X_1,\ldots,X_n$ un campione con distribuzione $N(\mu,\sigma^2)$, con σ^2 nota. Consideriamo il test di ipotesi bilatera $H_0)\ \mu=\mu_0$ e livello di significatività α. Spiegare il significato di "p-value" del test. Calcolare il p-value del test al punto *a*).

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.3 del 2010

Esercizio 1. Discutere, al variare dei parametri reali h, k, il seguente sistema nelle incognite x, y:

$$\begin{cases} x + (1-k)y = k + 2\,h + 1 \\ k\,x - k\,y = 1 - h \\ x + (1-k)\,y = k + 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse del seguente sistema nelle incognite z, w:

$$\begin{cases} \exp z \cdot \exp w = -1 + i \\ \exp z + \exp w = -1 - 2\,i \end{cases}$$

Esercizio 3. In un riferimento $\mathcal{R} = \mathcal{R}(O, x, y, z)$:
a) scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per i tre punti $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ e $C(0,0,1)$, determinandone centro e raggio;
b) determinare l'equazione del cono che proietta la circonferenza γ dall'origine O.

Esercizio 4. Si consideri la matrice reale A

$$A = \begin{pmatrix} 2\,k+2 & k & -k \\ 0 & 2+3\,k & -k \\ 0 & -2-k & 3\,k+4 \end{pmatrix}$$

a) studiare triangolabilità e diagonalizzabilità al variare di k;
b) trovare gli eventuali valori di k per cui A è nilpotente.

Esercizio 5. Si consideri il fascio individuato dalle coniche γ_1, γ_2 di equazioni, rispettivamente, $\gamma_1 : 2\,x^2 + y^2 - x - 6\,y + 2 = 0$ e $\gamma_2 : x^2 - y = 0$.
a) Determinare le eventuali circonferenze del fascio.
b) Determinare le eventuali parabole del fascio.
c) Per le eventuali parabole trovate nel punto b) calcolare la direzione dei loro assi di simmetria e le coordinate del vertice.

Esercizio 6. Si considerino le coniche γ_k e ϕ_k di equazione, rispettivamente

$$\gamma_k : 3\,x^2 + 3\,y^2 + (k-3)\,xy + (-3\,k-9)\,x + (-3\,k-9)\,y + 9\,k + 11 = 0\;;$$

$$\phi_k : x^2 + 4\,y^2 - 2(2\,k+1)x - 24\,ky + 44\,k - 4 = 0$$

con k parametro reale. Determinare eventuali valori di k per cui γ_k e ϕ_k hanno lo stesso centro.

Esercizio 6 bis. Una macchina produce delle bottiglie di policarbonato il cui spessore viene dichiarato essere in media di $\mu = 3,8$ mm. Viene estratto un campione di 6 bottiglie e viene trovato uno spessore medio di $3,99$ mm ed uno scarto quadratico $s = 0,25$ mm.
a) Si può concludere che lo spessore delle bottiglie prodotte dalla macchina è diverso da $3,8$ mm al livello di significativita $\alpha = 0,1$?
b) Quanto dovrebbe essere il valore massimo per s per poter ritenere che μ è diversa da $3,8$ mm?
c) Costruire il test sulla media con varianza incognita, ipotizzando che un eventuale cambiamento possa avvenire solo in aumento della media stessa.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.4 del 2010

Esercizio 1. Studiare al variare del parametro reale a il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2\,x + y + a\,z = -a \\ x + (a+1)\,y + z = a+2 \\ x + y + (a+1)\,z = a+5 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$\exp z + \frac{i\,\overline{\exp z}}{1+\overline{\exp z}} = \frac{1}{i(1+\overline{\exp z})}$$

Esercizio 3. a) Determinare l'equazione del cono circolare $\mathcal{C}$ tangente alle sfere $S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2-4=0$ e $S_2 : x^2+y^2+(z+4)^2-16=0$.
b) Determinare, motivando la risposta, l'equazione di un piano che intersechi $\mathcal{C}$ in una parabola.

Esercizio 4. Data la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k & -k-1 & 1 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

a) Si studi la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' di A al variare del parametro k;
b) Per $k=2$ determinare l'autospazio relativo all'autovalore λ con $|\lambda| \neq 1$.
c) Posto $k=1$, determinare il polinomio caratteristico delle matrici A^{15} e A^{300}.

Esercizio 5. a) Determinare la conica γ passante per $A(1,0)$, $B(0,1)$, $P(-4,-5)$ e tangente nell'origine alla conica di equazione $x^2+4\,y^2+2\,xy+x+y=0$.
b) Verificare che γ e' un'iperbole.
c) Determinare il centro e gli asintoti di γ.

Esercizio 6. Trovare un intervallo di confidenza al 95% per la media di una distribuzione normale con $\sigma = 2,6$ dato il campione

$$1,9 \qquad 2,5 \qquad 3 \qquad 2,7 \qquad 1,5\ .$$

Spiegare come si dovrebbe calcolare lo stesso intervallo se σ fosse incognito.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.5 del 2010

Esercizio 1. Studiare il seguente sistema al variare dei parametri h, k:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3\,x - 3\,y = 1 - 2\,h \\ (h-1)x + (k+1)y + (h-1)z = k - 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (\exp(z))^2 + 2\,w\exp(z) + w^2 + 1 = 0 \\ \exp(z) - w = -1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la superficie $Q : (x-z+1)^2+4(y-z+1)^2-4(z-2)^2 = 0$ e le due curve $\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + 4\,y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ e $\gamma_2 : \begin{cases} (x+1)^2 + 4\,(y+1)^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Determinare i valori di a per cui la retta $r : \begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$ è contenuta nella superficie Q.
b) Verificare che Q è un cono che proietta γ_1 in γ_2 e se ne determini il vertice.
c) Determinare l'equazione cartesiana di una retta $r' \neq r$ contenuta nella superficie Q.

Esercizio 4. Data la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ h^2 + h & 0 & 1 \\ 0 & h+1 & h \end{pmatrix}$$

a) studiare la triangolabiltà e la diagonalizzabilità al variare di h;
b) per $h = 0$ determinare un'eventuale base ortonormale di autovettori di A.

Esercizio 5. Sono assegnati i punti $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 1)$, $D(-1, 0)$.
a) Si scriva l'equazione del fascio di coniche passanti per i quattro punti A, B, C, D.
b) Determinare le equazioni delle coniche degeneri del fascio.
c) Dire se il fascio può essere scritto come combinazione lineare di p_1 e p_2, dove p_1 e p_2 sono parabole.
d) Scrivere l'equazione della conica γ del fascio passante per $E\left(0\,,\,\frac{1}{2}\right)$ e classificarla.
e) Scrivere l'equazione della proiettività φ del piano proiettivo che fissa punto per punto la retta $x_2 = 0$ e scambia tra loro $(2, 1, 1)$ e $(-2, 1, 1)$.
f) Si scriva la conica γ (trovata al punto d) in coordinate omogenee e si determini l'equazione della conica γ' immagine di γ mediante φ; classificare la conica γ', trovandone i punti all'infinito.

Esercizio 6. Siano X ed X' variabili aleatorie indipendenti che descrivono una caratteristica comune a due "popolazioni". Supponiamo che X ed X' abbiano distribuzione entrambe con legge normale e stessa varianza e siano C e C' campioni estratti rispettivamente da X ed X'.

$$C: \quad 5.1 \quad 4 \quad 3.9 \quad 5.4 \quad 6 \quad 4.5.$$

$$C': \quad 3.2 \quad 6 \quad 4 \quad 4.1 \quad 5.2 \quad 3.5.$$

Verificare l'ipotesi che X ed X' abbiano la stessa legge a livello di significatività $\alpha = 0.05$.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.6 del 2010

Esercizio 1. Studiare il seguente sistema al variare del parametro k:

$$\begin{cases} (k-1)\,x + (k+1)\,z = 0 \\ 2\,x + (-k-1)\,y + (-k-1)\,z = 0 \\ kx - y + z = 1 \\ x + y - (k+2)\,z = -k-2 \end{cases}$$

Esercizio 2. a) Verificare che $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{11} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

b) Determinare le soluzioni complesse del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i\,\exp z\,\overline{\exp z} - \exp z = -\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{11} \\ |\exp z| = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Determinare l'equazione cartesiana del piano α passante per $A(1,1,2)$, perpendicolare al piano $y + z + 1 = 0$ e parallelo alla retta $r : \begin{cases} 3\,x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

b) Determinare le eventuali sfere tangenti nel punto A al piano α e tangenti ulteriormente al piano $x - 3\,y + z - 4 = 0$.

Esercizio 4. Data la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ k+1 & k & k \end{pmatrix}$$

a) studiare la triangolabiltà e la diagonalizzabilità al variare di k;

b) determinare i valori di k e h per cui A è simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & h \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

c) per $h = 0$ si determini una eventuale base di autovettori per la matrice B.

Esercizio 5. a) Determinare l'equazione del fascio di coniche aventi per asse la retta $x + y = 0$, $V(-1\,,\,1)$ come vertice e passanti per il punto $P(3,0)$.

b) Determinare la conica γ del fascio passante per $Q(0,1)$.

c) Verificare che γ è un'iperbole, determinandone il centro C e l'altro vertice V'.

d) Determinare il polo della retta $3\,x + 2\,y + 3 = 0$ rispetto alla conica γ.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.7 del 2010

Esercizio 1. Studiare il seguente sistema al variare del parametro k:

$$\begin{cases} k^2\,x + (2-k)y = 6-k \\ k\,x + (k-1)y + z = k \\ k\,x + (3\,k-2)y + 3\,z = 2\,k+3 \end{cases}$$

Esercizio 2. a) Trovare le soluzioni (w, z) della seguente equazione:

$$w^3 \exp z - (1+i)w^3 + \exp z - (1+i) = 0$$

b) Dire se $(w, z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\, \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{4}\pi i\right)$ è soluzione dell'equazione precedente.

Esercizio 3. Determinare il luogo costituito dai centri delle sfere tangenti all'asse z e alla retta

$$r : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

verificando che si tratta dell'unione di due piani.

Esercizio 4. a) Date le matrici reali della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & a+1 & a+1 \\ b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare tra esse quelle che ammettono l'autovalore 1.
b) Studiare la diagonalizzabilità e la triangolabilità di queste ultime.
c) Per $a = -1$ determinare gli eventuali valori di k affinché $(1, 1+k, -2)^T$ sia autovettore di A.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di coniche tangenti alla retta $t : x - y + 2 = 0$ nel punto $T(-1, 1)$ e passanti per l'origine e per il punto $A(1, 1)$.
a) Determinare le eventuali parabole del fascio.
b) Determinare la conica γ passante per $B(-3, 0)$, verificando che si tratta di un'iperbole.
c) Determinare gli asintoti di γ.
d) Si determini il polo rispetto a γ della retta parallela a $3\,x - 9\,y + 8 = 0$ e passante per il punto $T(-1, 1)$.