Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.2 del 2011

Esercizio 1. Studiare il seguente sistema al variare dei parametri reali a, b :

$$\begin{cases} x + 2\,y - z = a \\ 2\,x - a\,y + z = a - 1 \\ a\,x + 2\,y - z = b + 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^4 = (3 + 4\,i)^4 \ .$$

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ dei punti equidistanti dall'asse z e dal piano $\pi : x - z + 1 = 0$. Si dimostri che $\mathcal{L}$ è un cono, determinandone il vertice.

Esercizio 4. Data la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & a \\ 0 & a & a \\ -a & a & a \end{pmatrix}$$

a) studiare la triangolabiltà e la diagonalizzabilità al variare di a;
b) si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$: $W = \text{Span}(1, 0, -a)^T$; si determini, al variare di a, la controimmagine tramite A di W.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di coniche tangenti alle rette $r : x + y = 0$ e $s : y = 1$ rispettivamente nei punti $O(0, 0)$ e $T(0, 1)$.
a) Si scriva l'equazione del fascio.
b) Determinare la conica γ del fascio passante per $A(1, 0)$ e la si classifichi.
Considerata la proiettività φ rappresentata dalla matrice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

c) determinare la controimmagine della retta impropria;
d) determinare gli eventuali punti impropri di $\varphi(\gamma)$;
e) determinare l'equazione della retta tangente alla conica $\varphi(\gamma)$ nel suo punto $\varphi(A)$.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n.3 del 2011

Esercizio 1. a) Studiare il seguente sistema al variare dei parametri reali h, k:

$$\begin{cases} x + h\,y + k\,z = h \\ x + k\,y + h\,z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

b) Si ponga $k = 1$. Indicati con π_1, π_2, π_3 i piani aventi, in un riferimento $\mathcal{R}(O; x, y, z)$, come equazioni rispettivamente la prima, la seconda e la terza equazione del sistema, determinare i valori di h per cui l'intersezione di π_1 e π_2 sia una retta parallela a π_3.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione complessa

$$4\,z^2(\exp 2\,z) - a(\exp 2\,z) = 2\,i(\exp z)(4\,z^2 - a)$$

a) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che l'equazione precedente ammetta la soluzione $z = i/2$.
b) Per il valore determinato di a calcolare tutte le soluzioni dell'equazione suddetta.

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$a : \begin{cases} x + y = 2 \\ 3\,x - y = 2 \end{cases} \quad ; \quad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$$

a) Scrivere l'equazione della superficie Q generata dalla rotazione di r attorno alla retta a. Classificare Q determinandone eventuali elementi di simmetria.
b) Verificare che l'intersezione di Q con il piano $x = 2$ è un'iperbole, e determinarne le direzioni degli asintoti.

Esercizio 4. Date le matrici reali della forma

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & k-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Studiare la diagonalizzabilità e la triangolabilità di A al variare del parametro reale k.
b) Determinare gli eventuali valori di k per cui $\dim Im(A^2) \neq \dim Im(A)$.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di coniche

$$y^2 - y + \lambda\,x^2 = 0\ ;$$

a) determinare i punti base del fascio, le eventuali rette tangenti ed elementi di simmetria comuni a tutte le coniche del fascio;
b) determinare le eventuali parabole del fascio;
c) determinare la conica γ del fascio passante per $P(1, 2)$.

Si consideri la proiettività φ rappresentata dalla matrice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

d) determinare le immagini dei punti $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$;
e) determinare l'immagine di γ tramite φ.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.4 del 2011

Esercizio 1. Studiare il seguente sistema al variare dei parametri reali h, k:

$$\begin{cases} x - k\,y + z = 1 \\ h\,x + y = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva il seguente sistema nelle variabili complesse z e w :

$$\begin{cases} i\,\exp(w) = -\exp(w - z) \\ \exp(z) = \exp(z + i\,w) \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Dimostrare che esiste una circonferenza passante per i punti $A(2, -1, 0)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, 2, -1)$ e $D(-1, 2, 0)$ determinandone le equazioni cartesiane, il centro e il raggio.
b) Scrivere le equazioni della retta tangente la circonferenza nel punto A .

Esercizio 4. Sono date le matrici reali della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,a+1 & 0 \\ a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} .$$

a) Studiare la triangolabilità e la diagonalizzabilità di A al variare del parametro reale a.
b) Per $a = 0$ si determini la dimensione di $Im(A)$ ed una base ortonormale dell'ortogonale di $Im(A)$.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di coniche

$$\lambda\,x^2 - \lambda\,y^2 + 2\,xy - 2\,x = 0\ .$$

a) Determinare punti base del fascio, eventuali tangenti ed elementi di simmetria comuni a tutte le coniche del fascio.
b) Dimostrare che si tratta di iperboli al variare del parametro λ, determinandone i punti impropri.
c) Determinare il luogo dei centri delle coniche del fascio.
d) Determinare la conica γ del fascio avente per polo e polare rispettivamente il punto $P(1, 2)$ e $p : 2\,x - y - 1 = 0$.
e) dire, dandone una motivazione, se esiste una proiettività che trasforma γ nella conica di equazione $2\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,x = 0$ e che lascia fisso il fascio di coniche assegnato.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.5 del 2011

Esercizio 1. a) Studiare il seguente sistema al variare del parametro reale a :

$$\begin{cases} x + (2\,a+1)y + z = 1 \\ x + a\,y = 0 \\ a\,x + y = 1 \\ (a-2)\,x + (1-2\,a)\,y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva il sistema nelle variabili complesse z e w :

$$\begin{cases} \exp w + \exp z = 1 \\ (\exp(w) - 1)\left(\exp(z) - \sqrt{3}\,i\right) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Scrivere l'equazione del cono $\mathcal{C}$ di rotazione di asse la retta $a : \begin{cases} 2\,x + y = 0 \\ x + 3\,y = -5 \end{cases}$, contenente il punto $P(0,0,2)$ ed avente il vertice sul piano $\pi : x - y + z = 2$.

b) Scrivere le equazioni della conica sezione del cono con il piano $\pi' : 2\,x + y = 0$ e classificarla.

Esercizio 4. Date le matrici reali della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Studiare la diagonalizzabilità e la triangolabilità di A al variare del parametro reale a.

b) Per $a = -1$ si trovino gli autospazi di A.

c) Per $a = -1$ si verifichi che $A^2 = A$ e che A rappresenta una proiezione di $\mathbb{R}^3$ su un piano π secondo la direzione $\overrightarrow{d}$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π e la direzione $\overrightarrow{d}$.

Esercizio 5. a) Si scriva l'equazione della conica γ tangente in $(0\,,\,0)$ alla retta $r : x - y = 0$ e passante per i punti $P\left(1\,,\,\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2}\,,\,-1\right)$ ed $R(-2\,,\,2)$.

b) Si verifichi che γ è un'iperbole, determinandone: centro, asintoti ed assi di simmetria.

c) Si determini un'affinità φ tale che $\varphi(\gamma) = \gamma'$ abbia equazione $xy - x + y - 2 = 0$.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.6 del 2011

Esercizio 1. Si considerino, al variare dei parametri reali h, k i sistemi a) e b) con

$$a: \begin{cases} k\,x + 2\,ky = -3 \\ x + y - z = -k \\ k\,x + 2\,y - k\,z = -4 \end{cases} \quad ; \quad b: \begin{cases} (h+3)x + (k+1)y - z = -k \\ (k-1)x + 3\,y + (1-k)z = 2\,h + 2 \end{cases} .$$

Si determinino, se esistono, valori comuni di h, k per cui il sistema a) ammette ∞^1 soluzioni ed il sistema b) ammette ∞^2 soluzioni.

Esercizio 2. a) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$\left(z^2|z|^2 - i\bar{z}\right)\left((\exp(z))^2 + 4\right) = 0$$

Esercizio 3. a) Scrivere l'equazione delle eventuali sfere tangenti nel punto $P(1, 0, 2)$ al piano

$$\pi : x + 2\,y - z + 1 = 0$$

e tangenti ulteriormente al piano $\alpha : x + y - z + 2 = 0$.

Esercizio 4. Date la matrici reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 2\,k & -k & 1 \\ 1 & -2\,k & 1 \\ 0 & 0 & 1 - 2\,k \end{pmatrix}$$

a) Studiare la diagonalizzabilità e la triangolabilità di A al variare del parametro reale k.
b) Provare che se una matrice B ammette l'autovalore λ, allora la matrice $B - \alpha I$ ammette l'autovalore $\lambda - \alpha$.
c) Determinare un eventuale valore di k per cui la matrice $A - (1 - 2\,k)I$ risulti nilpotente.

Esercizio 5. a) Si scriva un'equazione della parabola avente asse parallelo alla retta $x = y$, passante per $A(-2, 2)$ e tangente la retta $x - 3\,y = 0$ nell'origine.
b) Determinare l'asse ed il vertice della parabola.
c) Individuare i valori di k per cui esistono affinità che trasformano $(0, 0)$ in $(-2, 2)$, $(1, 0)$ in $(-k, 3)$, $(0, 1)$ in $(-1, 2)$ e scriverne le equazioni.

Determinare, se esistono, i valori di k per cui la parabola si trasforma in se' stessa.