Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.1 del 2012

Esercizio 1. Discutere la risolubilità del seguente sistema al variare dei parametri reali h, k

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2\,y - 2\,z = 1 - 2\,h \\ h\,x + k\,y + h\,z = k - 1 \\ 2\,x + y - z = 1 - 2\,h + k \end{cases}$$

Esercizio 2. a) Risolvere la seguente equazione complessa:

$$z^3 \exp(2\,z + 1) + z^2 \exp(2\,z + 1) + z\,\exp(2\,z + 1) + z^3 + z^2 + z = 0$$

Esercizio 3. Date le sfere di equazioni

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ \ , \ \ S_2 : (x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 = 1\ ,$$

determinare i valori di a per cui esse sono tangenti esternamente e quelli per cui sono tangenti internamente.

Per uno di questi valori determinare l'equazione del piano tangente ad entrambe le sfere.

Esercizio 4. Date le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) verificare che le matrici $A_k = A + kB$ sono diagonalizzabili (in campo reale) per ogni valore del parametri reale k.
b) Si verifichi poi che tutte le matrici A_k hanno lo stesso nucleo, ma hanno immagini differenti.

Esercizio 5. a) Si considerino i punti $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-2, 0)$, $D(0, -2)$ e si studi il fascio delle coniche passanti per essi.
b) Si determini poi la conica γ del fascio passante per $E(-3, -2)$ e la si classifichi.
c) Si verifichi che esiste un punto della retta di equazione $x_1 + x_2 = 0$ (in coordinate omogenee) che ha la stessa polare rispetto a tutte le coniche non degeneri del fascio.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.2 del 2012

Esercizio 1. a) Studiare il seguente sistema al variare dei parametri reali h, k:

$$\begin{cases} h\,x - y + h\,z = -1 \\ k\,x - hy = 1 \\ x + y + z = h \end{cases}$$

b) Determinare le soluzioni del sistema per $h = 0$ e $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse del seguente sistema

$$\begin{cases} (\exp(z))^5 = 1 \\ \mathrm{Im}(\exp(z)) < 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Determinare le sfere tangenti alla retta $t : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2\,x - y - 2\,z = -1 \end{cases}$ e contenenti

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Tra le sfere trovate in a) sia S^* quella avente raggio minimo; determinare il raggio della circonferenza sezione di S^* con un piano avente distanza $d = \frac{1}{2}$ dal centro C^* di S^*.

Esercizio 4. Data la matrice reale

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -k & k \\ 2 & 2-k & k-4 \\ 1 & 1-k & k-2 \end{pmatrix},$$

a) studiarne triangolabilità e diagonalizzabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$;
b) individuare eventuali valori di k per cui la matrice A_k è nilpotente;
c) per $k = 0$ e $k = -1$ determinare una base di $Im(A_k) \cap Ker(A_k)$.

Esercizio 5. E' dato il fascio di coniche

$$(x + y)^2 - 1 + \lambda(x + 1)^2 = 0\ .$$

a) Determinare i valori di λ per cui la conica è un'iperbole.
b) Per tali valori determinare le coordinate del centro e le equazioni degli asintoti.
c) Determinare l'insieme dei punti (x, y) del piano per cui esiste un'unica iperbole del fascio passante per essi.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.3 del 2012

Esercizio 1. Determinare i valori del parametro reale k per cui il sistema

$$\begin{cases} k\,x + k\,z = k^2 - k \\ k\,x + z = k^2 - 3\,k + 2 \\ k\,x - k\,y = k^3 - k^2 \end{cases}$$

ammette ∞^2 soluzioni e, tra esse, determinare quelle appartenenti ad $U = \mathrm{Span}\{e_1 - 2\,e_3, e_1 + e_2\}$.

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} w + z = \pi\,i \\ \exp(w + z) \cdot \exp(2\,z) = -i\,. \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione della retta $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = -2\,z \end{cases}$ intorno alla retta $a : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

Classificare la conica sezione di $\mathcal{S}$ con $z = 0$ e dire che tipo di conica si ottiene sezionando $\mathcal{S}$ con un piano generico del fascio di asse a.

Esercizio 4. Date le matrici reali

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & k & k+1 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & k & k \end{pmatrix},$$

studiare triangolabilità e diagonalizzabilità di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$

Determinare k tale che la controimmagine di $W = \mathrm{Span}\,\{6\,e_1 + 3\,e_3\}$ abbia dimensione 2.

Esercizio 5. a) Scrivere l'equazione del fascio di coniche tangenti in $T(1,1)$ alla conica $\gamma : x^2 + 2\,y^2 - 3 = 0$ e passanti per $A(-1,1)$ e $B(-1,-1)$.
b) Determinare le equazioni delle coniche degeneri del fascio.
c) Determinare le equazioni delle eventuali iperboli aventi un asintoto parallelo alla retta $x - 2\,y = 0$.
d) Determinare le equazioni dell'affinità φ che ha T come punto unito e che manda A in B e B in A.
e) Classificare la conica $\gamma_1 : x^2 + 2\,x\,y - 2\,x + 2\,y - 3 = 0$ e determinare la trasformata della conica γ_1 mediante l'affinità φ del punto d).

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n. 4 del 2012

Esercizio 1. Studiare il seguente sistema al variare del parametro reale h :

$$\begin{cases} x - h\,y - z = -3 \\ h\,x + y + z = 1 \\ x + h\,y + z = 1 \\ h\,y + z = h \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva il sistema nelle variabili complesse z e w :

$$\begin{cases} \exp z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i \\[2ex] z - 2\,w = \dfrac{\pi}{4}\,i \\[2ex] \pi < |w| < 9\,\pi \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Scrivere l'equazione del cono $\mathcal{C}$ di rotazione avente come asse la retta a : $\begin{cases} x = -1 \\ z = 0 \end{cases}$, come vertice il punto $V = (-1, 2, 0)$ e passante per il punto $A = (1, 0, 2)$.
b) Scrivere le equazioni delle eventuali rette appartenenti al piano $x = 3$ e parallele ad una generatrice del cono.

Esercizio 4. Date le matrici reali della forma

$$A = \begin{pmatrix} h+1 & h+1 & 0 \\ 0 & h-2 & 0 \\ h-2 & h+1 & h+1 \end{pmatrix}$$

a) Studiare la diagonalizzabilità e la triangolabilità di A al variare del parametro reale h.

b) Per $h = 2$ si determini l'autospazio associato ad un autovalore non nullo.

c) Per $h = 2$ si determini Im A; si determini inoltre un eventuale vettore che appartenga a ker A^2 e non appartenga a ker A.

Esercizio 5. a) Determinare l'equazione della parabola γ avente per asse la retta di equazione $x + y = 0$, il vertice nell'origine e passante per il punto $(0, -2\,a)$, con $a \neq 0$.
b) Determinare le coordinate dei punti aventi per polare, rispetto a γ, le rette di equazione $x - y = 2\,a$ e $x - y = -2\,a$.
c) Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera γ' che abbia centro in $C = (1, 1)$, un asintoto parallelo all'asse di γ e che passi per $P = (3, -4)$.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail:

Scritto n.5 del 2012

Esercizio 1. a) Studiare il seguente sistema al variare dei parametri reali h e k:

$$\begin{cases} x + (h-1)y + hz = k \\ x - y + (h-1)z = k \\ x - y - z = 1 - h \\ h\,y + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. a) Risolvere l'equazione complessa

$$\exp(z) = e\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right).$$

b) Calcolare $\exp\left(1 + \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\,i\right)$ con $x \in \mathbb{R}$ e determinare eventuali valori di x tali che $1 + \left(x + \frac{\pi}{6}\right)i$ sia soluzione dell'equazione di cui al punto a).

Esercizio 3. Scrivere le equazioni delle sfere tangenti al piano $\alpha : x - 2\,y - 2\,z = 0$, intersecanti la retta $r : x = y = z$ in una corda di lunghezza $2\,\sqrt{2}$, aventi centro sul piano $x = 0$ e distante $\sqrt{2}$ da r.

Esercizio 4. Date le matrici reali della forma

$$A = \begin{pmatrix} 2\,h & -3 & 0 \\ h & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

a) Studiare la diagonalizzabilità e la triangolabilità di A al variare del parametro reale h.
b) Per $h = 4$ si determini l'autospazio associato all'autovalore di modulo minimo.
c) Per $h = 4$ si determini $\mathrm{Im}(A^5)$.
d) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ la cui matrice associata rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$ coincide con A per $h = 4$. Si calcoli l'immagine del generico vettore $p(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2$ e si determini la controimmagine dell'autospazio associato all'autovalore di modulo minimo.

Esercizio 5. a) Studiare il fascio di coniche passanti per $P = (-1, 0)$, aventi per asse la retta $x = y$ e come diametro passante per P la retta $x - 2\,y + 1 = 0$.
Determinare:
b) gli eventuali elementi di simmetria comuni a tutte le coniche del fascio;
c) l'equazione della conica γ passante per $T = (-3, 0)$ e l'equazione della retta tangente a γ in T;
d) il polo del diametro di γ passante per T.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.7 del 2012

Esercizio 1. a) Studiare il seguente sistema al variare dei parametri reali h e k:

$$\begin{cases} x + (k+1)\,y + (k+2)\,z = h-2 \\ x + (k-h+1)\,y + (k+1)\,z = h-2 \\ (k+2)\,y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i valori di h e k per cui $(3, 1, -2)$ è soluzione del sistema.

Esercizio 2. a) Determinare le radice quarte complesse di $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ e determinare le soluzione dell'equazione complessa $\exp(z) = w_0$ con w_0 radice quarta di w con parte reale minore.

Esercizio 3. Scrivere le equazioni del cono di rotazione avente vertice $V = (-1, -1, 3)$ e contenente i punti $A = (0, 0, 1)$ e $A' = (-2, -2, 1)$ che risultano simmetrici rispetto al suo asse.
Classificare la conica sezione del cono con il piano per i punti A, A' e $B = (0, 0, 2)$.

Esercizio 4. Date le matrici reali della forma

$$A = \begin{pmatrix} 4\,h+4 & -h-2 & 0 \\ 4\,h & 0 & 0 \\ h-2 & 1 & h-2 \end{pmatrix}$$

a) Studiare la diagonalizzabilità e la triangolabilità di A al variare del parametro reale h.
b) Per $h = 0$ si determini un vettore $v_0 \in \ker A$ ed un vettore $w \in \mathrm{Im} A$ che siano ortogonali tra loro e di norma 1. Si completi il sottoinsieme $\{v_0, w\}$ di $\mathbb{R}^3$ ad una base ortonormale dello stesso.

Esercizio 5. a) Scrivere l'equazione della parabola avente per vertice il punto $V = (1, 2)$, passante per i punti $A = (4, 3)$ ed $A' = (2, 5)$ simmetrici rispetti all'asse di simmetria.
Determinare il polo della retta $d : x - y = 0$ ed il polo della sua simmetrica rispetto all'asse della parabola.