Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.3 del 2013

Esercizio 1. a) Al variare del parametro reale h studiare il seguente sistema $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} x_1 - h\,x_2 - x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ x_1 - 2\,x_3 + 2\,h\,x_4 = 0 \end{cases}$$

e determinarne le soluzioni.
b) Determinare gli eventuali valori del parametro h per cui una soluzione del sistema $\mathcal{S}$ è l'unica soluzione del sistema $\mathcal{S}'$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 7 \\ h\,x_2 = -h \\ x_2 + (h-1)x_3 - x_4 = -2\,h \\ h\,x_4 = h \end{cases}$$

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \exp z = w^2 \\ w^2 + (1-i)\,w - i = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si considerino le rette r ed s di equazione rispettivamente

$$r : \begin{cases} y = 2\,x \\ z = 1 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x + 3\,y + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Determinare le equazioni di una retta che sia complanare con r ed s e che sia perpendicolare ad r.

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} -1+h & 2 & 0 \\ h & 1 & -h \\ -1 & -h & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare la dimensione di ImA e di Ker$A$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
b) Determinare per $h = 0$ autovalori ed autovettori della matrice A.
c) Determinare per $h = 0$ un autovettore di A^2 che non sia autovettore di A.
d) Dire se per $h = 0$ la matrice A^2 è diagonalizzabile.

Esercizio 5. a) Si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ generato dalle coniche tangenti alla retta di equazione $x + y - 1 = 0$ nel suo punto improprio ed alla retta $t : x + 2\,y - 2 = 0$ nel suo punto $T = (2, 0)$.
b) Si studi il fascio $\mathcal{F}$.
c) $\mathcal{F}$ contiene circonferenze?
d) Studiare la conica passante per il punto $P = (5, -2)$, determinandone i punti impropri e gli eventuali asintoti.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.4 del 2013

Esercizio 1. a) Al variare del parametro reale h si studi il seguente sistema $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} x+z=2-h \\ h\,x-h^2\,y+(1-h)\,z=1-h \\ x-h\,z=1 \end{cases}$$

b) Si determinino i valori di h e k per cui $(k-h+1, h, k+1+h)$ e' soluzione del sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}$.

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse (z,w) del sistema

$$\begin{cases} \exp(-w) = -\exp(-w-2\,z) \\ \exp(z) = \exp(z+2\,w)\,. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la superficie di equazione $z^2-2\,xy+2\,x-4\,y+3=0$.

a) Si classifichi la superficie.

b) Si dimostri che e' una superficie di rotazione intorno alla retta $\begin{cases} y=x+3 \\ z=0\,. \end{cases}$

c) Si determini la circonferenza contenuta nella superficie passante per il punto $P=(-2,5,1)$ ed il suo raggio.

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro $h\in\mathbb{R}$, le matrici reali

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b+1 & 0 & b+1 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$$

a) Studiare la triangolabilita' e diagonalizzabilita' al variare dei parametri a e b.
b) Determinare i valori di a e b per cui la matrice e' nilpotente e non nulla.
c) Determinare, per $a=0$ e $b\neq -1$, un vettore che appartiene a $\ker A^2$ e non appartiene a $\ker A$.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di coniche per il quale consideriamo l'equazione

$$2\,x^2+2\,xy+y^2-1+\lambda\,(x^2-1)=0\,.$$

a) Determinare i punti base del fascio e verificare che in tali punti tutte le coniche del fascio hanno la stessa tangente.
b) Classificare, al variare di λ, le coniche del fascio.
c) Determinare gli elementi di simmetria comuni a tutte le coniche del fascio.
d) Tutte le proiettivita' del piano proiettivo che trasformano ogni conica del fascio in una conica del fascio hanno uno stesso punto fisso. Quale?

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.5 del 2013

Esercizio 1. a) Al variare del parametro reale h si studi il seguente sistema $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} h\,x + y + (h-2)\,z = 1 + h \\ x + h\,y + (h-2)\,z = 2\,h - 1 \\ h\,x - h\,z = h \end{cases}$$

b) Per $h = 0$, considerate la matrice completa A' associata al sistema $\mathcal{S}$ e l'applicazione lineare $L_{A'}$ di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$, si determini la controimmagine del vettore $(1, -1, 0)$. Tale controimmagine e' un sottospazio di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse (z, w) del sistema

$$\begin{cases} \exp(w) = z \\ z^2 - (2 - \sqrt{3}\,i)\,z + 1 - \sqrt{3}\,i = 0 \\ |w|^2 = (\ln\,2)^2 + \dfrac{25}{9}\,\pi^2 \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Si determini l'equazione del luogo $\Phi_{r,s}$ dei punti dello spazio aventi distanze uguali dalle rette

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} y = 1 \\ x = -z. \end{cases}$$

b) Si classifichi $\Phi_{r,s}$.
c) Si determini e si studi il luogo $\Phi_{r,q}$ dei punti equidistanti dalla retta r del punto a) e dalla retta $q : \begin{cases} x = y \\ y = -z. \end{cases}$
d) Si classifichi, per entrambe le superfici $\Phi_{r,s}$ e $\Phi_{r,q}$, la sezione γ con il piano di equazione $3\,x - y + z = 0$.

Esercizio 4. Si considerino, al variare dei parametri h, $k \in \mathbb{R}$, le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,h-1 & 0 \\ 0 & h & k-1 \\ 0 & k & k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare le matrici A che commutano con la matrice B verificando che esse dipendono da un solo paramentro e quindi si possono scrivere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,h-1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; studiare la diagonalizzabilita' di tali matrici al variare del paramentro h verificando che sono sempre triangolabili.
b) Determinare i valori di h per cui la matrice $A - I$ e' nilpotente ed il suo indice di nilpotenza.
c) Calcolare l'inversa di A in funzione di A^2, A ed I. (Suggerimento: calcolando $(A - I)^3$ si ha...)

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per il quale consideriamo l'equazione

$$2\,\lambda(x^2 - y^2 + x - y) + 2\,(x^2 - y - 1) = 0\,.$$

a) Si classifichino le due coniche γ_1 e γ_2 che generano il fascio e si determinino i punti base del fascio.
b) Si determinino le equazioni delle parabole del fascio, determinandone i vertici e gli assi di simmetria; si verifichi che ognuna passa per il vertice dell'altra e si dimostri che sono simmetriche rispetto ad una bisettrice degli assi cartesiani.
c) Si classifichino le coniche del fascio al variare del parametro λ.
d) Si determini il centro C_λ della generica conica a centro del fascio;
e) si verifichi che il luogo dei centri C_λ, al variare della conica a centro del fascio, e' un'iperbole, e se ne determini l'equazione.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.6 del 2013

Esercizio 1. a) Al variare del parametro reale h si studi il sistema $AX = O$ con $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ed

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1+h & 1+3\,h \\ h & 0 & 2\,h \\ h-2 & 1 & 2\,h-1 \end{pmatrix}.$$

b) Determinare un vettore $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che il sistema $AX = b$ non ammetta soluzioni.

Esercizio 2. Determinare le eventuali soluzioni complesse $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ del sistema

$$\begin{cases} 8\,w = -z^2 \\ z = w^2 \\ |\exp(w)| = \mathrm{e} \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Si determinino le equazioni della proiezione γ' dal punto $(0,0,0)$ della curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2 - 2\,y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{sul piano} \quad \pi : x + z - 1 = 0\,.$$

b) Si determinino poi le equazioni di una curva δ del piano $x + y + 2\,z - 1 = 0$ la cui proiezione, secondo la direzione dell'asse z su π, sia γ'.

Esercizio 4. Si considerino, al variare dei parametri $h,\, k \in \mathbb{R}$, le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ h+k & 1 & h-k \\ h-k & h-k & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare i valori del parametro k in funzione del parametro h in modo che le matrici corrispondenti ammettano l'autovettore $(1, -1, 0)$ e per tali matrici studiare la triangolabilita' e la diagonalizzabilita'.

b) Posto $h = -\dfrac{1}{2}$ determinare la dimensione del nucleo di A e verificare se il vettore $(1, -1, 1)$ appartiene ad $\operatorname{Im} A$.

Esercizio 5. a) Determinare l'equazione della conica γ avente per asse la retta $y = x$, tangente in $T(1, 2)$ alla retta $t : 7\,x - 2\,y - 3 = 0$ e passante per $P(1, 1)$.
b) Verificare che si tratta di un'iperbole e determinarne il centro, l'altro asse, i punti impropri e gli asintoti.
c) Determinare l'equazione del luogo dei punti la cui polare passa per $(3, -1)$.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.7 del 2013

Esercizio 1. Al variare dei parametri reali h, k si studi il sistema

$$\begin{cases} x_1 + h\,x_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + h\,x_3 = h \\ x_1 + (h+1)\,x_2 + 3\,h\,x_3 = h + k\ . \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare, al variare del parametro reale h, le eventuali soluzioni complesse z del sistema

$$\begin{cases} \exp z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \\[2ex] z^2 - \left(h^2 + \dfrac{7}{3}\,\pi\right)\,i\,z + i^2\,\dfrac{7}{3}\,\pi\,h^2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si considerino la sfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} ;$$

determinare:
a) il fascio $\mathcal{F}$ di piani di asse r;
b) il luogo dei centri delle circonferenze sezione di $\mathcal{S}$ con il generico piano di $\mathcal{F}$.

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & -h \\ 0 & -h & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Studiare la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' di A.
b) Per $h = 2$ determinare un sottospazio invariante di dimensione 2 sommando diretto dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 2$.

Esercizio 5. a) Determinare l'equazione della parabola γ avente per diametro la retta di equazione $x - y + 2 = 0$ e passante per i punti $O = (0,0)$, $P = (-2,0)$ e $Q = (0,1)$.
b) Determinare la polare del punto improprio $A_\infty = (1,-1,0)$; di quale retta si tratta ?