Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.1 del 2014

Esercizio 1. Si studi il seguente sistema al variare dei parametri reali k, h

$$\begin{cases} x + k\,y = 0 \\ k\,x + 2\,z = k \\ k\,y = k \\ x = h\,. \end{cases}$$

Esercizio 2. a) Si determini il valore del numero reale t per cui si ha $(2 + i\,t)^2 = 3 - 4\,i\,.$
b) Si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^5 = 81\,\bar{z} \\ z^2 - (4 + i)\,z + 3\,(1 + i) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Tra i coni circolari retti che contengono la circonferenza $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ e che intersecano il piano $\pi : z = 2$ in una circonferenza passante per il punto $A(0, 1, 2)$, si determini l'equazione di quello avente il vertice V appartenente al semispazio $z > 2$.

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 2\,k + 2 & -k - 1 & -2 \\ 0 & k + 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Studiare la triangolabilità e la diagonalizzabilità al variare del parametro reale k.
b) Determinare i valori di k per cui la matrice A ammette un autovalore con molteplicità algebrica uguale a 3.
c) Determinare i valori dei parametri reali h e k tali che le matrici $(A - h\,I)$ siano nilpotenti e determinarne l'indice di nilpotenza.

Esercizio 5. a) Si determini l'equazione cartesiana della conica γ avente centro in $C(0, 1)$, tangente in $T(2, 1)$ alla retta $y = x - 1$ e passante per il punto $Q(2, -3)$.
b) Considerato il diametro di γ passante per Q, si determinino coordinate del suo polo.

Cognome Nome :
Numero di matricola :
Corso di studi :
e-mail :

Geometria e Algebra lineare

Prova scritta 2 del 2014

1. Discutere il seguente sistema al variare del parametro.

$$\begin{cases} (a+3)\,x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Si dica inoltre per quali valori del parametro il sistema ammette (almeno) una soluzione per cui valga $z = 1$.

2. Risolvere

$$\exp(z) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

3. Data la retta

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases},$$

e la retta $a : 2x = 2y = z$, determinare l'equazione cartesiana della superficie descritta da r ruotando attorno a a.

Successivamente, determinare il punto di r che, nella rotazione, descrive una circonferenza di raggio minimo.

4. Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

se ne studi la diagonalizzabilità e la triangolabilità.

Verificato poi che la matrice è somma di due matrici nilpotenti (una triangolare superiore, una triangolare inferiore) che non commutano, dimostrare che, al contrario, la somma di due matrici nilpotenti che commutano è ancora nilpotente.

5. Dato il fascio di coniche

$$2xy - y^2 + 4x - 2y + \lambda = 0$$

si verifichi che esso è costituito (con esclusione delle coniche degeneri) da coniche dello stesso tipo, tutte con lo stesso centro di simmetria.

Si descrivano poi (nel piano proiettivo) le coniche degeneri del fascio.

In generale, si dimostri che tutte le coniche non degeneri con due punti impropri assegnati A e B e con il medesimo centro di simmetria fanno parte di uno stesso fascio.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.3 del 2014

Esercizio 1. a) Al variare dei parametri reali h e k si studi il seguente sistema $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} x - y + (h-2)\,z = -h+1 \\ h\,x + y - z = 0 \\ (h-2)\,x + 3\,y - (2\,h+1)\,z = k - h\,. \end{cases}$$

b) Si determinino i valori di h e k per cui le soluzioni del sistema costituiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse z dell'equazione

$$\exp(z) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

Tra le soluzioni determinate individuare quelle per cui z^n è un numero immaginario puro.

Esercizio 3. Si consideri la superficie $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 + z^2 - 2\,xz - y + z = 0$ e la sua sezione γ con il piano $\alpha : x - y = 0$.
a) Si classifichi la superficie $\mathcal{Q}$.
b) Si classifichi la curva γ precisando la posizione di α rispetto a $\mathcal{Q}$.
c) Si determini l'equazione cartesiana del cilindro $\mathcal{Q}'$ avente come direttrice γ', sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\beta : z = 1$ e generatrici parallele al vettore $d = (1, 0, 1)^T$.
d) Quali sono le possibili sezioni piane di $\mathcal{Q}'$?

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ k & 1-k & 1 \\ -k & 1 & -1+k \end{pmatrix}$$

a) Studiare la triangolabilità e diagonalizzabilità al variare dei parametri k.
b) Determinare i valori di k per cui esiste una matrice ortogonale Q tale che $Q^T A\,Q$ sia una matrice diagonale e determinare in corrispondenza una matrice ortogonale Q.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di coniche generato dalle coniche $\gamma_1 : y^2 - x = 0$ e $\gamma_2 : xy - 3\,y + 2 = 0$ per il quale consideriamo l'equazione

$$y^2 - x + \lambda\,(xy - 3\,y + 2) = 0\,.$$

a) Studiare γ_1 e γ_2.
b) Determinare i punti base del fascio propri ed impropri.
c) Classificare, al variare di λ, le coniche del fascio.
c) Determinare un'eventuale iperbole avente un asintoto parallelo alla retta $r : 2\,x - 3\,y = 0$.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.4 del 2014

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$. Sia $m =$ numero equazioni, $n =$ numero incognite, $r = \mathrm{rg}(A)$, $r' = \mathrm{rg}(A\,|\,b\,)$. Indicare il numero delle eventuali soluzioni nei seguenti casi:

a) $m = 5 \quad n = 4 \quad r = 3 \quad r' = 4$

b) $m = 5 \quad n = 4 \quad r = 4 \quad r' = 4$

c) $m = 5 \quad n = 4 \quad r = 3 \quad r' = 3$

• Si consideri il sistema omogeneo $\mathcal{S} : Ax = 0$ nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\,; \end{cases}$$

si determini una base ortonormale del sottospazio vettoriale V' di $\mathbb{R}^5$, costituito dalle soluzioni di $\mathcal{S}$.

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse (z, w) del sistema

$$\begin{cases} \exp(2\,z + w) = (1 - i)\,\exp(w) \\ w^3 = -1 \end{cases}$$

Tra le soluzioni determinate individuare quelle aventi parte immaginaria minore di $6\,\pi$.

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del cono circolare retto con il vertice nell'origine e tangente alla sfera di equazione $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.
Determinare successivamente l'equazione di una sfera avente centro sul piano $\pi : 2\,x + 2\,y + z = 20$ e tangente internamente al cono determinato in precedenza.

Esercizio 4. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rapresenta la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^2$ su una retta: quale?
La matrice $A = \begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$ rappresenta più in generale la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^2$ su una retta, secondo la direzione (a, b): dimostralo.
Studiare poi la triangolabilità e la diagonalizzabilità di AB e di BA.

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche rappresentato nella forma

$$\mathcal{F} : (y+1)^2 - x^2 + \lambda(y^2 - 2\,y) = 0\,.$$

a) Si determinino i punti base del fascio (ed altre eventuali proprietà geometriche comuni a tutte le coniche del fascio).
b) Si studi il fascio stesso.
c) Determinare, in dipendenza del parametro λ, le coordinate del centro della generica conica a centro del fascio.
d) Si determini la proiettività che lascia fissa punto per punto la retta $x_2 = 0$ e scambia tra loro i punti $(3, 2, 1)$ e $(-3, 2, 1)$; qual è l'immagine mediante tale proiettività della parabola del fascio $\mathcal{F}$?

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n. 5 del 2014

Esercizio 1. Si studi il seguente sistema lineare nel parametro reale k:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+k\,y-z=k-1 \\ x+y+k\,z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Dato il numero complesso $w=\dfrac{\pi}{3}\,i$, si determinino le soluzioni dell'equazione

$$z^3\cdot\exp(w)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,.$$

Esercizio 3. Si determini l'equazione cartesiana del cilindro circolare retto contenente la circonferenza γ passante per i punti $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$.

Esercizio 4. a) Si determini la matrice $A\in\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ che ha gli autovalori $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=\lambda_3=2$ con relativi autospazi $V_{\lambda=0}=\text{Span}\left\{(1,1,2)^T\right\}$ e $V_{\lambda=2}=\text{Span}\left\{(1,1,1)^T,(0,1,1)^T\right\}$.
b) Verificato che risulta

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

determinare una base di $ker(A)$.
c) Determinare una matrice **non nulla** $B\in\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $AB=O$.
d) Dimostrare per via sintetica che A ed A^T hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità geometrica.

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche rappresentato nella forma

$$\mathcal{F}:2\,xy-1+\lambda(y^2-2\,x)=0\,;$$

a) determinare i punti impropri delle coniche del fascio;
b) determinare le eventuali parabole, ellissi e coniche degeneri reali del fascio;
c) determinare centro e assi della conica γ che si ottiene per $\lambda=-2$;
d) determinare la retta polare del punto proprio $P=(1,-2)$ rispetto a γ spiegando il motivo della mutua posizione rispetto all'asintoto $y=-2$.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n. 6 del 2014

Esercizio 1. Si studino i seguenti sistemi lineari S ed S' al variare dei parametri reali k ed h:

$$S : \begin{cases} x - y + z = k \\ x + k\,y - z = 1 \end{cases} \qquad S' : \begin{cases} x + \frac{1}{2}h\,z = 0 \\ x + y + \frac{1}{2}h\,z = 1 + h \\ y + z = h \end{cases}$$

b) Si determinino eventuali valori dei parametri h, k per cui esistono soluzioni comuni ad S ed S'.

Esercizio 2. a) Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$\exp(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\,.$$

b) Tra le soluzioni precedenti, che indichiamo con z_k, individuare quelle con argomento compreso tra 0 e π, per cui esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che z_k^r e z_k abbiano argomenti opposti.

Esercizio 3. Nel riferimento $\mathcal{R}(O, x, y, z)$
a) si dimostri che la quadrica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2\,xy + 4\,xz + 4\,yz = 0$$

rappresenta un cono reale di vertice $O = (0, 0, 0)$.
b) Si dimostri che la sezione di $\mathcal{C}$ con il piano $\pi : x - y + z = 0$ è una conica degenere unione delle rette r, s di cui si diano le equazioni.
c) Si determini il luogo dei punti V da cui proiettare r ed s in due rette parallele r' ed s' del piano $\pi' : x + 2\,y - 3\,z = 1$.

Esercizio 4. Si consideri matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ al variare dei paramentri reali a, b

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b+1 \\ a & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a) Studiare triangolabilità e diagonalizzabilità al variare dei parametri reali a e b.
b) Determinare i valori di a e b per cui A e nilpotente e per essi $(ImA)^{\perp}$ ed il nucleo di A^T.
c) Dimostrare che per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ i suddetti spazi coincidono.

Esercizio 5. a) Scrivere l'equazione del fascio di coniche tangenti in $T = (0, 0)$ alla retta $x = 0$ e passanti per $A = (1, 1)$ e $A' = (h, -1)$ con h parametro reale.
b) Si dimostri che 1 è l'unico valore da assegnare al parametro h affinché nel fascio vi sia una sola parabola γ di cui si chiedono le coordinate omogenee del punto improprio C_∞ .
c) Determinare l'equazione della polare p di $P_\infty = (1, 2, 0)$ e verificare che p contiene i punti medi delle corde i cui estremi sono le intersezioni della parabola γ con le rette contenenti P_∞.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n. 7 del 2014

Esercizio 1. Si studi il seguente sistema lineare S al variare del paramento k:

$$S : \begin{cases} 2\,x - 2\,y + (k-1)\,z = 0 \\ 2\,x - 2\,y + (k+1)\,z = 1 \\ (1-k)\,y - 2\,z = k-2 \\ (k+2)\,z = 1-k \end{cases} .$$

b) Si determinino eventuali valori reali del parametro s tali che $\left(-\frac{3}{4}\,,\,-1,\,1-s\right)$ sia soluzione di S.

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\exp(z) = e\,w^4\,w' \quad \text{con} \quad w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i \quad , \quad w' = \cos\frac{2\,\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\,\pi}{3} .$$

Esercizio 3. Si determini l'equazione cartesiana del cono circolare retto di vertice $V = (0,0,2)$ e contenente la circonferenza γ passante per i punti diametralmente opposti $O = (0,0,0)$ e $A = (0,2,2)$.

Esercizio 4. a) Si consideri la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1-h & 2 & -5+2\,h \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

e si studi la triangolabilità e diagonalizzabilità al variare del parametro reale h.
b) Per $h = 2$ si determini una base di autovettori di A.
c) Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si motivi l'invertibilità della matrice A; per $h = 2$ si dimostri, senza calcolarne il polinomio caratteristico, che A^{-1} è diagonalizzabile.

Esercizio 5. a) Si determini l'equazione della parabola γ passante per il punto $A = (3,1)$, intersecante il suo diametro $d : x - y + 1 = 0$ nel punto $B = (0,1)$, ed avente nello stesso punto B come tangente la retta $t : x + 2\,y - 2 = 0$.
b) Si scriva l'equazione dell'asse della parabola.