Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare
Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.1 del 2015

Esercizio 1. Al variare dei parametri reali h e k si considerino il sistema S e l'applicazione $L_{A_k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dove e'

$$S : \begin{cases} x + y - z = h \\ h\,x + y - h\,z = 1 \end{cases} \qquad \text{ed} \quad A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & k & -2\,k \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di h studiare e determinare le soluzioni $(x, y, z)^T$ del sistema S.
b) Tra le soluzioni precedenti individuare quelle con $y = 0$ e rappresentanti, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, vettori appartenenti al nucleo di L_{A_k}.

Esercizio 2. Si risolva il sistema nelle variabili complesse z e w :

$$\begin{cases} \exp z = -1 \\ (\exp w - i)(\exp z + 2) = -1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Dire se la curva γ di equazioni

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t^2 \end{cases}$$

e' piana oppure no ed individuare l'equazione cartesiana della superficie Φ generata dalla rotazione di γ intorno alla retta $a : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Classificare Φ.

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, le matrici reali

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ -h & h & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Studiare la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' di A_h al variare del parametro h.
b) Studiare la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' di A_h^2 al variare del parametro h.

Esercizio 5. Si determini l'equazione cartesiana dell'iperbole equilatera γ avente centro $C(-1, -1)$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 + 3\,x + 3\,y = 0$ nel vertice $(0, 0)$.
b) Si determinino nel piano proiettivo i punti aventi la stessa polare rispetto a γ e γ'.

Università di Pisa
Geometria e Algebra Lineare
Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.2 del 2015

Esercizio 1. a) Al variare dei parametri reali h e k studiare il seguente sistema S :

$$\begin{cases} x+y-z=-2\,h+k \\ h\,x+y-z=1-h \\ h\,x-2\,y+h\,z=0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva il sistema nelle variabili complesse z e w :

$$\begin{cases} \exp(z-w)=\,i \\ z\,+\,2\,w=0 \\ |z|\,=\dfrac{5}{3}\,\pi \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la circonferenza γ di centro $C=(1,1,-1)$, di raggio $r=\sqrt{6}$ e complanare con la retta

$$s:\begin{cases} x=t+2 \\ y=t \\ z=2\,t-1 \end{cases}.$$

a) Si determinino le equazioni cartesiane delle eventuali sfere contenenti la circonferenza γ e tangenti al piano $\pi: 2\,x+2\,y+z-9=0$.

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro $h\in\mathbb{R}$, la matrice reale

$$A_h=\begin{pmatrix} 0 & 1-h & 0 \\ 1-h & 0 & -h \\ 0 & h-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si studi la triangolabilità e la diagonalizzabilità di A_h al variare di h.
b) Si determini, al variare del parametro h, il nucleo dell'applicazione $L_{A_h}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ associata alla matrice A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, ed in corrispondenza un sottospazio W tale che risulti $\ker(L_{A_h})\oplus W=\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di coniche

$$\mathcal{F}:\ x\,y-x+\lambda(x+y)(x+y-2)=0\,;$$

a) si studi il fascio individuando eventuali elementi di simmetria comuni a tutte le coniche del fascio;
b) si determini l'equazione della conica γ del fascio tale che la sua retta tangente nell'origine passi per il punto $P(-4,5)$;
c) dopo aver verificato che γ è un'iperbole, si determinino le equazioni cartesiane dei suoi asintoti.

Università di Pisa
Geometria e Algebra Lineare
Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.3 del 2015

Esercizio 1. a) Al variare dei parametri reali h e k studiare il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + h\,y - z = k \\ x + y - z = 0 \\ x - h\,y - z = 0 \\ h\,x + y = -h \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva il seguente sistema nelle variabili complesse z e w:

$$\begin{cases} \exp(2\,z) = w \\ \\ w^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{cases}$$

Esercizio 3. Si determinino le equazioni cartesiane delle eventuali sfere tangenti al piano π : $x - y + z - 2 = 0$ nel punto $P = (1, 1, 2)$ e tangenti ulteriormente alla sfera di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 - 12\,y + 10\,z + 49 = 0$.

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice reale

$$A_k = \begin{pmatrix} 3\,k & 0 & k \\ -k & 2\,k & -k \\ 2+k & 0 & 2+3\,k \end{pmatrix}.$$

a) Si studi la triangolabilità e la diagonalizzabilità di A_k al variare di k.
b) Per $k = 0$ si determinino, se possibile, due matrici B e C non nulle tali che $AB = 0$ e $CA = 0$; si scrivano poi le corrispondenti applicazioni L_B e L_C associate rispettivamente a B e C rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si classifichi la conica γ di equazione $x\,y - x - y + 2 = 0$, determinandone eventuale centro di simmetria, assi e punti impropri. Si determinino le tangenti t_1 e t_2 nei punti rispettivamente $T_1 = (0, 2)$ e $T_2 = (2, 0)$ e si consideri il fascio $\mathcal{F}$ individuato da γ e dalla conica unione delle due tangenti, giustificando l'assenza in tale fascio di parabole e individuando la posizione nel piano dei punti per ognuno dei quali passa un'iperbole del fascio.

Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 4 del 2015

Esercizio 1. a) Studiare il seguente sistema al variare dei parametri h e k:

$$\begin{cases} h\,x - y + h\,z = k \\ x + h\,y = h \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) Individuare i valori di h e k per cui le tre equazioni rappresentano tre piani appartenenti ad uno stesso fascio F e si scrivano equazioni del suo asse.

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni complesse (z, w) del seguente sistema:

$$\begin{cases} \exp^2(z+w) + (1-i)\,\exp(z+w) = 0 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Si determini l'equazione cartesiana della superficie L generata dalla rotazione della retta $r : \begin{cases} x = z+1 \\ y = -z \end{cases}$ intorno alla retta $a : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$ e la si classifichi.
b) Si consideri la curva γ_k sezione di L con il piano $\pi_k : z = k$; si determini k in modo che il suo centro sia il punto di coordinate $C\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, k\right)$ e per suddetto valore la si classifichi.

Esercizio 4. Data la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ k-1 & 4 & k-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

a) studiare la triangolabilità e la diagonalizzabilità al variare di k.
b) Posto $k = 1$, si determini a tale che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

commuti con A e si determini un autovettore di B che sia anche un autovettore di A indicandone il corrispondente autovalore per A.

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche aventi centro nel punto $C(1,1)$ e tangenti in un vertice alla retta $x + y = 4$.
a) Si studi il fascio $\mathcal{F}$.
b) Si determini l'equazione della conica γ passante per il punto $P(1,0)$.
Si consideri nel seguito la proiettività φ rappresentata dalla matrice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Si determinino le immagini dei punti di coordinate omogenee $(0,0,1)$, $(2,2,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,1)$.
d) Si determini l'immagine della conica γ.

Università di Pisa
Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 5 del 2015

Esercizio 1. a) Si studi il seguente sistema reale nelle incognite x, y, z, t al variare del parametro a

$$\begin{cases} a\,x + y + z + t = -1 \\ x + a^2\,y + a\,z + t = -1 \\ x + z + t = -1 \end{cases}$$

b) Per $a = 1$, indicata con A la matrice dei coefficienti del sistema e considerata l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, si determini una base di $\ker L_A$ e una base di $\operatorname{Im} L_A$.

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ del seguente sistema

$$\begin{cases} \exp(2\,w + z) + \exp(w) = 0 \\ \exp(z) = \exp(w) + 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Si determini l'equazione della sfera $\mathcal{S}$ tangente nell'origine al piano $\pi : x + y - z = 0$ ed avente centro C appartenente al piano assiale del segmento avente come estremi i punti $A = (0, 0, 2)$ e $B = (2, 2, 2)$.
b) Si determinino i piani diametrali di $\mathcal{S}$ contenenti il punto $P = (2, 2, -2)$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

a) Si studi la triangolabilita' e diagonalizzabilita' di A al variare del parametro reale k.
b) Per $k = 0$ si determini un eventuale vettore $x \in \mathbb{R}^3$ tale che $Ax \neq 0$ e $A^2x = 0$ oppure si motivi la non esistenza del suddetto vettore x.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche individuato da $\gamma_1 : x^2+y^2-2\,xy+x+y-4 = 0$ e da $\gamma_2 : xy-4 = 0$ per il quale consideriamo l'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2\,xy + x + y - 4 + \lambda(xy - 4) = 0\,.$$

a) Si classifichino γ_1 e γ_2 e si determinino le eventuali tangenti, centri di simmetria ed assi comuni a tutte le coniche del fascio.
b) Si determinino eventuali circonferenze ed iperboli equilatere di $\mathcal{F}$.
c) Si verifichi che la conica del fascio avente centro di simmetria in $C = \left(\dfrac{3}{4}\,, \dfrac{3}{4}\right)$ è un'iperbole e si determinino le equazioni dei suoi asintoti.

Università di Pisa

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 6 del 2015

Esercizio 1. a) Si studi il seguente sistema nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} x - y + z = k \\ (k+1)\,x + y + z = 0 \\ x + k\,y + z = 0 \\ x + y + z = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ dell'equazione

$$z^3 \exp w - 8 \, \exp \, w + (1 + \sqrt{3}\, i)\, z^3 - 8\,(1 + \sqrt{3}\, i) = 0\,.$$

Esercizio 3. a) Si determini l'equazione della curva γ del piano $\alpha : x - 2\,y + z = 0$ che viene proiettata da $V = (1, 0, 0)$ sul piano $\pi : x + y - z = 0$ nella curva

$$\gamma' : \begin{cases} y^2 = 2\,z + 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

b) Si classifichino le curve γ e γ'.

Esercizio 4. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & h-1 \\ 0 & h-1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Si studi la triangolabilita' e diagonalizzabilita' di A al variare del parametro reale h.
b) Posto $h = 1$, senza effettuare calcoli si determini A^5 come combinazione lineare di A^2, A, I.

Esercizio 5. a) Si scriva l'equazione cartesiana dell'iperbole γ avente tra i suoi assi di simmetria la retta $a : x + y - 1 = 0$, tra i suoi asintoti la retta $2\,x - y + 1 = 0$ e passante per il punto $A = (1, 0)$.
b) Verificato che l'equazione della conica e'

$$\gamma : 2\,x^2 + 2\,y^2 - 5\,xy + 5\,x - 4\,y - 7 = 0\,,$$

si determini l'equazione della polare p del punto $P = (2, 1)$ ed il diametro coniugato al punto improprio della retta p.

Università di Pisa

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 7 del 2015

Esercizio 1. a) Si studi il seguente sistema nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare dei parametri reali k, h:

$$\begin{cases} x - k\,z = 0 \\ 2\,x + k\,y = h \\ k\,x + y + z = -1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} \exp z = 2\sqrt{3} + 2\,i \\ |z - 2\,\ln(2)| > 6\,\pi\,. \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Si scrivano equazioni per la circonferenza γ appartenente al piano $\pi : x - y + z = 0$, di centro $C_\gamma = (1, 1, 0)$ e raggio di misura $\sqrt{2}$.
b) Si determini il valore reale di k per cui esiste una sfera $\mathcal{S}$ contenente γ ed avente centro sulla retta

$$r : \begin{cases} x - z = k \\ y - z = 3\,. \end{cases}$$

c) Si determini l'equazione cartesiana della sfera $\mathcal{S}'$ tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $T(1, 0, -1)$ e passante per il punto $P(0, -2, 0)$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -1 & k & 2 \\ -k & 0 & 2\,k+1 \end{pmatrix}.$$

a) Si studi la triangolabilita' e diagonalizzabilita' di A_k al variare del parametro reale k.
b) Posto $k = 0$ si consideri la matrice A_0 e il sottoinsieme $W = \{B \in M_{3,3}(\mathbb{R}) : BA_0 = B\}$. Dire se W e' un sottospazio di $M_{3,3}(\mathbb{R})$ e determinarne una eventuale base.

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche di equazione cartesiana

$$\mathcal{F} : x^2 - y^2 - x + 3\,y + \lambda - 2 = 0\,.$$

Sia γ_λ la generica conica non degenere di $\mathcal{F}$; al variare di λ
a) si verifichi che γ_λ è un'iperbole;
b) si determinino i punti impropri di γ_λ;
c) si determinino gli asintoti ed il centro di γ_λ.
d) Si determini λ in modo che il punto $P(2, 0)$ sia il polo della retta $3\,x + 3\,y = 2$.