Verifica scritta 1B Scientifico 22/11/2008

I primi 20 esercizi valgono 0,45/10. L'esercizio 21 vale 1/10.

Esercizio 1. Calcola il M.C.D. e il m.c.m. tra i seguenti monomi: $3\,x^4y^6z^3$; $2\,x^5y^9$; $-5\,x^5yz^9w^4$.

Esercizio 2. Dire se il polinomio $x^4y^9 - 2\,x^3y^7 + 4\,x^2y^6 - xy^3 + y^2$ è omogeneo; qual è il grado complessivo del polinomio? Dire anche se è completo, ordinato rispetto alle variabili x e y.

Esercizio 3. Somma i polinomi $x^4 - 4x^2 + x - 1$ e $2x^2 + x^3 - x^2 + 3$; qual è il grado del polinomio ottenuto? Quale sarà il grado del polinomio ottenuto sommando due polinomi di quarto grado nella variabile x?

Esercizio 4. Scrivi un polinomio di quinto grado, nelle due variabili x e y, omogeneo e completo sia rispetto a x sia rispetto a y.

Esercizio 5. Costruisci il grafo di calcolo per la seguente espressione:

$$\{[3 + (6 - 8)] \cdot (-2)\} \cdot (1 + 5 \cdot 2)\ .$$

Esercizio 6. Semplifica la seguente espressione: $3\,x^4y^2 - x^2y^3 + x^4y^2 - \dfrac{1}{3}\,x^2y^3$.

Esercizio 7. Svolgi l'espressione: $(2\,y^3 - 3\,y^2 + 2\,y - 1)(3\,y + 2)$.

Esercizio 8. Svolgi l'espressione: $(x - 2)(x^2 + 1)(x + 3)$.

Esercizio 9. Svolgi l'espressione: $4(2x - y)(x - 1) - 3(x - 2)$.

Esercizio 10. Dire se la seguente uguaglianza è corretta: $(x - 2)(x - 3) = x(x - 3) - 3(x - 2)$.

Esercizio 11. Semplifica la seguente espressione:

$$\left[(-2\,xy)^4 : (8\,x^4y) + (-x^4)^3 : (x^3)^3\right](x^2 + y^2) + y^2(x^3 - 2\,y^3)$$

Esercizio 12. Svolgi la seguente espressione:

$$-2\,x^2y^2 + x\left(x^3y^5 - 2\,x^4y^4\right) : \left(-\frac{3}{4}\,x^2y^3\right)$$

Esercizio 13. Svolgi il seguente prodotto: $(x^h - 2)(x^{2h-1} - 1)(x^{h+1} + 1)$.

Esercizio 14. Svolgi il seguente quadrato: $\left(-\dfrac{2}{3}\,x^2y + 1 + \dfrac{1}{3}\,x^2y\right)^2$.

Esercizio 15. Svolgi il seguente quadrato: $(2\,x - 2\,y - 1 - y)^2$.

Esercizio 16. Semplifica la seguente espressione: $(a + b - c)^2 - (a - b + c)^2$.

Esercizio 17. Svolgi il seguente cubo: $(-2\,x + xy^2 + 3 + 6x - 1 - 3\,x)^3$.

Esercizio 18. Calcola $(97)^2$ e $(199)^3$ utilizzando opportunamente le formule dei prodotti notevoli.

Esercizio 19. Svolgi la seguente potenza: $(x - 2y^3)^6$ e calcola il valore dell'espressione per $x = -1$ e per $y = 1$.

Esercizio 20. Dire se il polinomio $-1000\,x^6 + 1 + 300\,x^4 - 300\,x^2$ è un cubo di un binomio. Spiega.

Esercizio 21. Considera un numero qualsiasi di due cifre e il numero che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre. E' vero che la differenza tra il quadrato del numero maggiore e il quadrato del numero minore risulta sempre divisibile per 99? Spiega.

Verifica scritta 1A Scientifico 25/11/2008

I primi 20 esercizi valgono 0,45/10. L'esercizio 21 vale 1/10.
Voto finale = 1/10 + punteggi parziali.

Esercizio 1. Calcola il M.C.D. e il m.c.m. tra i monomi: $3\,x^3y^8z^{11}w^3$; $-12\,x^7z^9w^3$; $9\,x^4yz^{12}w^4$.

Esercizio 2. Dire se il polinomio $2\,x^3y^8 - 2\,x^5y^7 + 4\,x^2y^4 - xy^2 + 5\,y + 2$ è omogeneo; qual è il grado complessivo del polinomio? Dire anche se è completo, ordinato rispetto alle variabili x e y.

Esercizio 3. Traduci in formula la seguente frase: *il triplo del quadrato della differenza tra il quadrato del primo numero e il quadruplo del secondo numero.*

Esercizio 4. Scrivi, se possibile, un polinomio nelle variabili x e y, omogeneo, completo rispetto a x, ma incompleto rispetto a y.

Esercizio 5. Costruisci il grafo di calcolo per la seguente espressione:

$$\{[-3\cdot 2 + (6+1)]\cdot(2)\}\cdot(1+5)\cdot(3-5)\ .$$

Esercizio 6. Semplifica la seguente espressione: $-2\,x^5y^3 - x^2y^3 + x^5y^3 + \frac{2}{5}\,x^2y^3$.

Esercizio 7. Svolgi l'espressione: $(2x-5y)(3x+4y)-(x+2y)(6x-10y)$.

Esercizio 8. Svolgi l'espressione: $(-x+3)(x^3+1)(x-1)$.

Esercizio 9. Svolgi l'espressione: $-\frac{1}{2}\,x^2\cdot(1-x)\cdot(2\,x^3y+x^2y^5)-4\,x^5y$.

Esercizio 10. Dire se la seguente uguaglianza è corretta: $x^2+y^2+3=(x+y)(x-y)+3$.

Esercizio 11. Semplifica la seguente espressione:

$$\left[x^2y^3-(2\,xy^4)(x^3y^2-x^4y^2)\right]:\left(-\frac{4}{5}\,xy^2\right)$$

Esercizio 12. Svolgi la seguente espressione:

$$(x+2)^2-(3-y+x)^2+(y-2)^2=$$

Esercizio 13. Svolgi il seguente prodotto: $(x^{h+4}-2)(x^{2h+3}-x^{h-1})(x^{h+1}-1)$.

Esercizio 14. Svolgi il seguente quadrato: $\left(-\frac{1}{3}\,y^3-2\,x+\frac{3}{2}\,y\cdot y^2\right)^2$.

Esercizio 15. Svolgi il seguente quadrato: $\left(-3\,xy^2-3+xy^2+4\right)^2$.

Esercizio 16. Semplifica la seguente espressione: $(a+b+c-d)^2-(a-b+c+d)^2$.

Esercizio 17. Svolgi il seguente cubo: $\left(x^2y-2+z\right)^3$.

Esercizio 18. Calcola $(39)^2$ e $(401)^3$ utilizzando opportunamente le formule dei prodotti notevoli.

Esercizio 19. Svolgi la seguente potenza: $(-x^2y+2xy^3)^5$ e calcola il valore dell'espressione per $x=0$ e per $y=6$.

Esercizio 20. Dimostra che il quadrato di un numero che ha 5 per ultima cifra finisce per 25.

Esercizio 21. Aggiungi al quadrato di un numero dispari il quadruplo del numero naturale che segue il numero dispari stesso. Dimostra che si ottiene un quadrato perfetto. Qual è la radice quadrata del quadrato ottenuto?

Verifica orale 1^a Scientifico 6/12/2008

Nome e Cognome ______________________________

Regolamento: punteggio di partenza $0,5/10$. Per ogni quesito si indichi una sola risposta. Ogni risposta esatta vale $+0,2/10$. Ogni risposta lasciata vuota vale $0/10$. Ogni risposta errata vale $-0,1/10$. Se viene indicata la risposta N. P. (nessuna delle precedenti) deve essere indicata anche la soluzione ritenuta corretta, altrimenti la risposta sarà considerata errata. Se viene indicata la risposta N. P. in presenza della risposta corretta nelle prime 4 risposte, la risposta sarà considerata errata, anche nel caso in cui la soluzione fornita è corretta.

Esercizio 1. Quale dei seguenti polinomi ha grado complessivo 10?

a) $x^{10}y + x^5y^5$ b) $2\,x^4y^2 + z^4$ c) $3\,x^4y^2 + 6x + y^3$ d) $3x^4y^6 + 2y^6 - 12\,x^5y^3$ e) N. P.

Esercizio 2. La somma di due polinomi di grado 5 ha grado:

a) può essere di grado 3 b) può essere maggiore di 5 c) 5 in ogni caso d) può essere di grado 7 e) N. P.

Esercizio 3. Due monomi si dicono simili se:

a) hanno lo stesso coefficiente b) in essi compaiono le stesse lettere c) hanno lo stesso grado d) hanno la stessa parte letterale e) N. P.

Esercizio 4. Il grado del prodotto fra due monomi è dato:

a) dalla somma dei gradi di ciascuno dei due monomi b) dal prodotto dei gradi di ciascuno dei due monomi c) dalla somma dei gradi di ciascuno dei due monomi, solo se sono simili d) dal prodotto dei gradi di ciascuno dei due monomi, solo se sono simili e) N. P.

Esercizio 5. La potenza $(-2\,a^2)^3$ è:

a) $2\,a^6$ b) $-8\,a^5$ c) $8\,a^6$ d) $-8\,a^6$ e) N. P.

Esercizio 6. Quale dei seguenti monomi è un divisore del monomio $6\,x^2y^3$?

a) $\frac{4}{3}x^2$ b) $2\,x^4y$ c) $-3\,x^3y^4$ d) x^3y^2 e) N. P.

Esercizio 7. Il polinomio $2\,a^4b^7 - 7\,a^7b^3$ è divisibile per il monomio:

a) a^7b^7 b) $5\,a^3b^7$ c) a^4b^3 d) $2\,a^7b^3$ e) N. P.

Esercizio 8. Il m.c.m. dei due monomi $2\,a^3b^5c$ e $22\,ab^6d^5$ è il monomio:

a) $22\,a^3b^6d^5$ b) $2\,a^2b^5$ c) $44\,a^4b^{11}cd^5$ d) $11\,ab^5cd^5$ e) N. P.

Esercizio 9. Il grado del polinomio $2\,x^2y - 5\,x^3$ rispetto alla x è:

a) 5 b) 2 c) 3 d) 1 e) N. P.

Esercizio 10. Un polinomio si dice omogeneo se:

a) tutti i suoi monomi hanno lo stesso coefficiente b) tutti i suoi monomi hanno la stessa parte letterale c) tutti i suoi monomi hanno lo stesso segno d) tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado e) N. P.

Esercizio 11. Il quadrato del binomio $(-2\,x - 3\,y)$ è :

a) $4\,x^2 + 9\,y^2 + 6\,xy$ b) $-4\,x^2 - 9\,y^2 - 12\,xy$ c) $-4\,x^2 - 9\,y^2 + 12\,xy$ d) $4\,x^2 + 9\,y^2 - 12\,xy$ e) N. P.

Esercizio 12. Il cubo del binomio $(-2\,a+b)$ è :

a) $8\,a^3+b^3+12\,a^2b-6\,ab^2$ b) $-8\,a^3+b^3+12\,a^2b-6\,ab^2$ c) $-8\,a^3+b^3-12\,a^2b+6\,ab^2$ d) $-8\,a^3+b^3-6\,a^2b+6\,ab^2$ e) N. P.

Esercizio 13. Il quadrato del trinomio $(-2\,x+3\,y-5)$ è :

a) $4\,x^2+9\,y^2+25-6\,xy+10\,x-15\,y$ b) $4\,x^2+9\,y^2+25+12\,xy-20\,x-30\,y$ c) $-4\,x^2+9\,y^2-25-12\,xy+10\,x+30\,y$ d) $4\,x^2+9\,y^2+25-12\,xy-20\,x-30\,y$ e) N. P.

Esercizio 14. La somma $0,\bar{7}+0,\bar{3}$ è :

a) $1,\bar{1}$ b) $1,1$ c) $1,11$ d) 1 e) N. P.

Esercizio 15. La frazione generatrice di $0,1\bar{7}$ è :

a) $\frac{17}{10}$ b) $\frac{8}{45}$ c) $\frac{16}{99}$ d) $\frac{17}{90}$ e) N. P.

Esercizio 16. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{5+7}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 5}{5+7}$ c) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 5}{5\cdot 7}$ d) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{5\cdot 7}$ e) N. P.

Esercizio 17. Dati tre numeri a, b e c, a quali delle seguenti frazioni è equivalente $\frac{a}{b}$?

a) $\frac{a+c}{b+c}$ b) $\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$ c) $\frac{a-c}{b-c}$ d) $\frac{a^c}{b^c}$ e) N. P.

Esercizio 18. La differenza di due numeri è negativa se:

a) i numeri sono entrambi negativi b) i numeri sono di segno opposto c) il minuendo è minore del sottraendo d) il sottraendo è minore del minuendo e) N. P.

Esercizio 19. Il valore assoluto di un numero negativo è:

a) il numero stesso b) l'opposto del numero c) ha senso solo per numeri positivi d) non si può fare e) N. P.

Esercizio 20. Qual è il risultato dell'espressione $\left[\left(2^6\right)^2 : 2^9\right]\cdot 2^2$?

a) 8 b) 16 c) 32 d) $\frac{1}{4}$ e) N. P.

Esercizio 21. Qual è il m.c.m. fra 12, 40, 16 e 60 ?

a) 60 b) 120 c) 240 d) 360 e) N. P.

Esercizio 22. Un ascensore parte dal terzo piano, scende di due piani, sale di quattro piani e poi altri quattro, infine scende di cinque piani. A quale piano è arrivato?

a) al quarto b) al terzo c) al quinto d) al primo e) N. P.

Esercizio 23. Addizionando un centesimo al numero $0,566$ otteniamo :

a) $0,576$ b) $0,567$ c) $0,5661$ d) $0,666$ e) N. P.

Esercizio 24. Quale frazione, ridotta ai minimi termini, rappresenta il numero $1,25$?

a) $\frac{10}{8}$ b) $\frac{50}{40}$ c) $\frac{15}{12}$ d) $\frac{5}{4}$ e) N. P.

Esercizio 25. Fra i numeri $0,56$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{5}{8}$, $0,25$ il minore e il maggiore sono, rispettivamente:

a) $\frac{3}{17}$ e $0,56$ b) $\frac{3}{8}$ e $0,56$ c) $0,25$ e $0,56$ d) $0,25$ e $\frac{5}{8}$ e) N. P.

Esercizio 26. A un numero x si addiziona il doppio di se stesso e poi si sottrae 3, ottenendo così -6. Qual è il numero x ?

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2 e) N. P.

Esercizio 27. Tre amici camionisti che hanno pranzato oggi nella medesima osteria vi passano di nuovo rispettivamente ogni 8, 12 e 18 giorni. Fra quanti giorni i tre potranno pranzare ancora insieme?

a) 96 b) 48 c) 64 d) non pranzeranno più insieme e) N. P.

Esercizio 28. In una classe il numero delle alunne è uguale ai $\frac{3}{4}$ del numero complesivo degli alunni. Sapendo che i maschi sono 6, quanti sono tutti gli alunni?

a) 10 b) 16 c) 20 d) 28 e) N. P.

Esercizio 29. Quale dei seguenti numeri è una radice del polinomio $x^2 - 4\,x + 3$?

a) 2 b) -3 c) 3 d) -1 e) N. P.

Esercizio 30. Il polinomio $-3\,x^2y^3 + x^3y^2 + y^5 + 2\,x$ è :

a) omogeneo e completo rispetto a x e y b) omogeneo e ordinato rispetto a x c) omogeneo e ordinato rispetto a y d) non è omogeneo ma è completo rispetto a x e) N. P.

Esercizio 31. Il prodotto $(2\,x - 5 + y)(2\,x + 5 + y)$ è uguale a:

a) $(2\,x + y)^2 - 25$ b) $(2\,x - 5)^2 - 5\,y$ c) $(2\,x - 5 + y)^2$ d) $4\,x^2 - 25 + y^2$ e) N. P.

Esercizio 32. Il grado del quadrato di un binomio è:

a) sempre 2 b) sempre pari c) può essere dispari d) non si può dire prima di aver eseguito il calcolo e) N. P.

Esercizio 33. Sviluppando il quadrato di un binomio il doppio prodotto è :

a) positivo se gli addendi del binomio hanno lo stesso segno b) sempre positivo c) positivo solo se gli addendi del binomio sono positivi d) positivo se gli addendi del binomio hanno segni opposti e) N. P.

Esercizio 34. L'espressione 15^2 è uguale a:

a) $10^2 + 5^2$ b) $10^2 + 5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5$ c) $10^2 + 5^2 + 10 \cdot 5$ d) $8^2 + 7^2$ e) N. P.

Esercizio 35. L'espressione $(x - 3)^2 - (3 - x)^2$ è uguale a :

a) $2\,x^2 + 18$ b) 1 c) $12\,x$ d) $2\,x^2 + 18 - 12\,x$ e) N. P.

Esercizio 36. Il prodotto $(y - 5)(-5 - y)$ è uguale a :

a) $y^2 - 25$ b) $-25 - y^2$ c) $25 - y^2$ d) $(y - 5)^2$ e) N. P.

Esercizio 37. Il grado del polinomio che è cubo di un binomio di secondo grado è:

a) cinque b) sei c) non si può sapere prima del calcolo d) tre e) N. P.

Esercizio 38. La potenza 132^2 è uguale a:

a) $100^2 + 30^2 + 2^2$ b) $(10^2 + 30 + 2)^2$ c) $(10 + 30 + 2)^2$ d) $10^2 + 30^2 + 2^2$ e) N. P.

Esercizio 39. Il cubo di un trinomio è :

a) un quadrinomio b) un trinomio c) un binomio con tutti i coefficienti multipli di 3 d) un quadrinomio con tutti i coefficienti multipli di 3 e) N. P.

Esercizio 40. Il polinomio prodotto di due polinomi:

a) è sempre un trinomio di secondo grado b) è un polinomio con grado complessivo uguale alla somma dei gradi dei polinomi dati c) è un polinomio con grado complessivo uguale al prodotto dei gradi dei polinomi dati d) se è un binomio è di grado superiore al secondo e) N. P.

Esercizio 41. Nella divisione tra due polinomi in una sola variabile, se il dividendo ha grado 15 e il divisore ha grado 5, il quoziente ha grado:

a) 10 b) 5 c) 20 d) 75 e) N. P.

Esercizio 42. Il resto della divisione tra $\left(3\,x - \dfrac{1}{2}\right)$ e $(x+1)$ è:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{5}{2}$ c) 1 d) 3 e) N. P.

Esercizio 43. Come si fattorizza il polinomio $x^2 + 9\,x + 8$?

a) $(x+1)(x-8)$ b) $(x-1)(x-8)$ c) $(x+1)(x+8)$ d) $(x-1)(x+8)$ e) N. P.

Esercizio 44. Per quale dei seguenti binomi è divisibile il polinomio $3\,x^2 - 7\,x - 6$?

a) $2\,x-3$ b) $2\,x+3$ c) $x-3$ d) $x+3$ e) N. P.

Esercizio 45. Tra i numeri $\dfrac{16}{10}$, $\dfrac{151}{100}$, $1,65$ e $\dfrac{1501}{1000}$, qual è più vicino a $1,5$?

a) $\dfrac{8}{5}$ b) $\dfrac{151}{100}$ c) $1,65$ d) $\dfrac{1501}{1000}$ e) N. P.

Esercizio 46. L'espressione $\left((-1)^{-2}\right)^{-1}$ è uguale a:

a) 1 b) -1 c) 0 d) l'espressione è indeterminata e) N. P.

Esercizio 47. Traduci in formula la seguente frase: "il quadrato del cubo del prodotto di un primo numero per un secondo numero è sommato al triplo del prodotto del primo numero per il quadrato del secondo numero":

a) $(x^2)^3 y + 3\,xy^2$ b) $((xy)^3)^3 y + 3\,xy^2$ c) $((xy)^2)^3 + 3\,(xy)^2$ d) $((xy)^3)^2 + 3\,xy^2$ e) N. P.

Esercizio 48. Il prodotto $89 \cdot 91$ è uguale a:

a) $90^2 - 1$ b) 90^2 c) $89^2 + 91^2$ d) $91^2 - 89^2$ e) N. P.

Esercizio 49. Quale delle seguenti frazioni è compresa tra $\dfrac{45}{46}$ e $\dfrac{102}{49}$?

a) $\dfrac{5}{12}$ b) $\dfrac{7}{15}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{9}{4}$ e) N. P.

Esercizio 50. Se in un rettangolo si diminuisce la lunghezza di un lato del 20% e si aumenta la lunghezza dell'altro lato del 20% l'area:

a) resta invariata b) aumenta del 20 % c) diminuisce del 20 % d) non possiamo stabilirlo perché non abbiamo dati sufficienti e) N. P.

Verifica scritta 1^a Scientifico 18/12/2008

Voto finale = somma dei punteggi parziali.

Esercizio 1. Semplifica la seguente espressione, utilizzando le proprietà delle potenze:

$$\left[-x^3y^5-\left(-\frac{5}{4}xy^2\right)^2\cdot\left(-\frac{32}{25}xy\right)\right]^3 \quad . \quad \textbf{[Punti = 1/10]}$$

Esercizio 2. Svolgi la seguente espressione:

$$(3\,x^2-y+2-xy-1)(1+3\,x^2-2-xy+y)-2(3\,x-y)(y-3\,x)$$

utilizzando i prodotti notevoli. [**Punti = 1/10**]
Calcola il valore dell'espressione per $x=1$ e $y=1$. [**Punti = 0,25/10**]

Esercizio 3. Sviluppa la potenza $(2\,x+y-4\,x)^4$ con il triangolo di Tartaglia. [**Punti = 0,75/10**]
Calcola il valore dell'espressione per $x=1$ e $y=2$. [**Punti = 0,25/10**]

Esercizio 4. Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile a che, diviso per (a^2-1), dà come quoziente (a^2+1) e come resto -1 . [**Punti = 1/10**]

Esercizio 5. Fattorizza il polinomio $2\,x^2+6\,x+4$. [**Punti = 0,75/10**]

Esercizio 6. Fattorizza il polinomio $\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{2}x$. [**Punti = 1/10**]

Esercizio 7. Determina k in modo tale che il polinomio $4\,x^4+12\,x^3-12\,x^2-44\,x+k$ abbia -1 come radice. [**Punti = 0,25/10**]
Fattorizza infine il polinomio ottenuto. [**Punti = 1/10**]

Esercizio 8. Determina un polinomio di quinto grado aventi come uniche radici $x=\frac{1}{4}$ e $x=-3$ ed avente $\frac{1}{2}$ come coefficiente direttivo. La soluzione è unica? Motiva la risposta. [**Punti = 1,25/10**]

Esercizio 9. Babbo Natale quest'anno ha molte renne: il loro numero è infatti uguale alla somma di 27 più il cubo di un numero intero. Vorrebbe disporre le sue renne in modo tale che formino un rettangolo le cui file sono formate da uno stesso numero (maggiore ovviamente di 1) di renne. Riuscirà a risolvere questo problema? Motiva la risposta. [**Punti = 1,5/10**]

Verifica scritta 1A Scientifico 20/01/2009

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10. Voto massimo: 10,5/10 (10 e lode)
Gli asterischi tra parentesi indicano il grado di difficoltà degli esercizi:
(*) facile ; (**) medio ; (***) impegnativo ; (****) difficile.

Esercizio 1. (*) Calcola il M.C.D. dei numeri 68 e 22 utilizzando l'algoritmo di Euclide. Come si calcola il m.c.m.?

Esercizio 2. (*) Scrivi una frazione molto "vicina" a $-\dfrac{32}{7}$.

Esercizio 3. (*) Svolgi l'espressione $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}x\right)^4$ facendo riferimento al triangolo di Tartaglia. Calcola il valore dell'espressione per $x=-1$.

Esercizio 4. (*) Svolgere l'espressione $(3-x-1)(x+2)+(x+2)^2$.

Esercizio 5. (*) Determina quoziente e resto della divisione polinomiale $[2\,(x+3)-(x+3)^2]:(x+3)$.

Esercizio 6. (*) Fattorizza il polinomio x^3-2x^2.

Esercizio 7. (*) Fattorizza il polinomio $-2\,x^2+x+1$.

Esercizio 8. (*) Fattorizza il polinomio $-\dfrac{1}{3}\,x^2-\dfrac{1}{6}\,x+\dfrac{1}{6}$.

Esercizio 9. (*) Determina le radici del polinomio $x^5+5\,x^4-36\,x^3$.

Esercizio 10. (**) Calcola quoziente e resto della divisione $(a^3+ab^4-a^2b^2+b):(a-b)$ considerando i polinomi scritti nella variabile a.

Esercizio 11. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quinto grado tale che, se lo dividiamo per (x^2-2), otteniamo $-\dfrac{3}{2}\,x+1$ come resto.

Esercizio 12. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di sesto grado in modo tale che non abbia radici e abbia termine noto nullo.

Esercizio 13. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado con termine noto uguale a $-\dfrac{5}{3}$ ed avente come uniche radici $x_1=-1$ e $x_2=4$.

Esercizio 14. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di ottavo grado in modo tale che risulti divisibile per il polinomio (x^2+x-1).

Esercizio 15. (**) Determina k in modo tale che il polinomio $x^3+k\,x^2+x+6$ abbia per radice $x=2$. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

Esercizio 16. (***) Scrivi, se possibile, un polinomio di secondo grado con coefficiente direttivo $\dfrac{1}{2}$, con termine noto 5 ed avente come radici $x_1=-2$ e $x_2=6$.

Esercizio 17. (***) Scrivi, se possibile, un numero intero negativo con tutte le seguenti proprietà: è un multiplo di 47; il suo valore assoluto è maggiore di 10000; può essere scritto come differenza di due quadrati non nulli.

Esercizio 18. (***) Si trovi una fattorizzazione per il polinomio $x^3+(-k-2)\,x^2+(2\,k-8)\,x+8\,k$ al variare del parametro k (*suggerimento: si trovi prima di tutto una radice del polinomio*).

Esercizio 19. (***) Dimostra che il cubo di un numero che finisce per 2 finisce per 8. Dimostra inoltre che la penultima cifra (cioè quella che viene scritta prima dell'8 finale) è sempre pari.

Esercizio 20. (****) Il numero $5^{347}+7^{234}$ è pari o dispari? Motiva adeguatamente la risposta.

Esercizio 21. (****) Dimostra che è impossibile trovare un quadrato perfetto della forma $4\,n+3$, dove n è un numero intero positivo.

Soluzioni verifica scritta 1A Scientifico 20/01/2009

Esercizio 1. $68 = 3 \cdot 22 + 2$; $22 = 2 \cdot 11 + 0$. M.C.D.(68 ; 22) = 2 (ultimo resto $\neq 0$).
m.c.m.(68 ; 22) $= \dfrac{68 \cdot 22}{M.C.D.(68;22)} = \dfrac{68 \cdot 22}{2} = 68 \cdot 11 = 68 \cdot (10+1) = 680 + 68 = 748$.

Esercizio 2. Possiamo considerare la frazione $-\dfrac{320001}{70000}$ oppure $-\dfrac{32000000}{6999999}$.

Esercizio 3. Svolgendo i calcoli si trova: $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\,x\right)^4 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{8}\,x + \dfrac{27}{32}\,x^2 + \dfrac{27}{32}\,x^3 + \dfrac{81}{256}\,x^4$. Il valore per $x = -1$ è uguale a $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} \cdot (-1)\right)^4 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{1}{256}$.

Esercizio 4. Si osservi che, per evitare di svolgere il quadrato del binomio, conviene mettere in evidenza $(x+2)$:

$$(x+2)(3 - x - 1 + x + 2) = (x+2) \cdot 4 = 4\,x + 8\ .$$

Esercizio 5. E' possibile mettere in evidenza il binomio $(x+3)$ nel polinomio dividendo:

$$2\,(x+3) - (x+3)^2 = (x+3)\big(2 - (x+3)\big) = (x+3)(-x-1)$$

abbiamo quindi che il polinomio quoziente è $(-x-1)$ e il resto è nullo.

Esercizio 6. Mettiamo in evidenza x^2:

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)\ ;$$

le radici del polinomio dato sono: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Esercizio 7. Si osserva che una radice del polinomio $-2\,x^2 + x + 1$ è $x = 1$. Visto che stiamo analizzando un polinomio di secondo grado, è possibile utilizzare la regola della somma e del prodotto delle radici; visto che il prodotto deve essere uguale a $-\dfrac{1}{2}$, e dato che una radice è $x = 1$, l'altra deve necessariamente essere $x = -\dfrac{1}{2}$. Quindi possiamo scrivere la seguente fattorizzazione del polinomio assegnato:

$$-2\,x^2 + x + 1 = -2\,(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\ .$$

Attenzione: non dimenticate il coefficiente direttivo -2**.**

Altro metodo: con la divisione polinomiale si trova che:

$$-2\,x^2 + x + 1 = (x-1)(-2\,x - 1)$$

e quindi, portando -2 fuori dalla seconda parentesi otteniamo:

$$-2\,x^2 + x + 1 = -2\,(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\ .$$

Esercizio 8.

$$-\frac{1}{3}\,x^2-\frac{1}{6}\,x+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\,x^2-\frac{1}{6}\,x+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot(-2\,x^2-x+1)$$

il polinomio tra parentesi è primitivo ed ha per radici $x_1=-1$ e $x_2=\frac{1}{2}$, quindi ammette la seguente fattorizzazione:

$$-2\,x^2-x+1=-2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ ;$$

in definitiva abbiamo:

$$-\frac{1}{3}\,x^2-\frac{1}{6}\,x+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(-2\,(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1}{3}(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ .$$

Esercizio 9. Nel polinomio $x^5+5\,x^4-36\,x^3$ possiamo mettere in evidenza x^3:

$$x^5+5\,x^4-36\,x^3=x^3(x^2+5\,x-36)\ ,$$

fattorizzando il polinomio $x^2+5\,x-36$ si trova:

$$x^2+5\,x-36=(x+9)(x-4)\ ;$$

quindi il polinomio di partenza può essere così fattorizzato:

$$x^5+5\,x^4-36\,x^3=x^3(x+9)(x-4)\ .$$

Le radici del polinomio sono: $x_1=0$, $x_2=-9$ e $x_3=4$.

Esercizio 10. Svolgendo la divisione polinomiale rispetto alla lettera a si trova:

$$a^3+ab^4-a^2b^2+b=\big(a^2+a\,(b-b^2)+b^4-b^3+b^2\big)(a-b)+b^5-b^4+b^3+b\ ,$$

quindi il polinomio quoziente è $\big(a^2+a\,(b-b^2)+b^4-b^3+b^2\big)$ mentre il resto della divisione è uguale a $(b^5-b^4+b^3+b)$.

Esercizio 11. Basta considerare il polinomio

$$x^3(x^2-2)+\left(-\frac{3}{2}\,x+1\right)=x^5-2\,x^3-\frac{3}{2}\,x+1\ .$$

Esercizio 12. Un tale polinomio non può esistere perché ***ogni polinomio con termine noto nullo ha almeno una radice:*** $x=0$***.***

Esercizio 13. Per prima cosa scriviamo un polinomio di quarto grado avente per radici $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$:

$$(x+1)^3(x-4) \tag{1}$$

per calcolare il termine noto di questo polinomio non è necessario svolgere tutto il prodotto tra polinomi, ma è sufficiente osservare che dal cubo del primo avremo come termine noto 1, che moltiplicato per il termine noto del secondo (cioè -4), darà come risultato -4. Visto che vogliamo ottenere termine noto uguale a $-\frac{5}{3}$, basta moltiplicare il polinomio (1) per un numero k tale che:

$$k \cdot (-4) = -\frac{5}{3}$$

si trova $k = \frac{5}{12}$.

Il polinomio cercato (***attenzione: non è l'unico polinomio che risolve il problema!***) è

$$\frac{5}{12}\,(x+1)^3(x-4) = \frac{5}{12}\,x^4 - \frac{5}{12}\,x^3 - \frac{15}{4}\,x^2 - \frac{55}{12}\,x - \frac{5}{3}\ .$$

Esercizio 14. La soluzione è molto semplice: basta considerare, ad esempio, il polinomio

$$x^6(x^2+x-1) = x^8 + x^7 - x^6\ .$$

Esercizio 15. Se il polinomio $x^3 + k\,x^2 + x + 6$ ha radice $x = 2$ allora sostituendo 2 al posto della x otteniamo come risultato zero:

$$2^3 + k \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0 \quad\Rightarrow\quad 8 + 4\,k + 8 = 0 \quad\Rightarrow\quad 4\,k + 16 = 0 \quad\Rightarrow\quad k = -4\ ;$$

il polinomio risulta dunque essere:

$$x^3 - 4\,x^2 + x + 6\ .$$

Per fattorizzarlo, dividiamo il polinomio per $x-2$ (infatti $x = 2$ è radice del polinomio: l'abbiamo imposto noi) trovando

$$x^3 - 4\,x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2\,x - 3)\ ;$$

il polinomio quoziente (cioè quello di secondo grado) ha per radici $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$:

$$x^2 - 2\,x - 3 = (x+1)(x-3)\ ;$$

in definitiva si trova la seguente fattorizzazione:

$$x^3 - 4\,x^2 + x + 6 = (x-2)(x+1)(x-3)\ .$$

Esercizio 16. Il polinomio, se esiste, deve avere la seguente forma:

$$a(x+2)(x-6)$$

con a da determinare in modo tale che siano soddisfatte le condizioni del problema. Visto che il coefficiente direttivo deve essere uguale a $\frac{1}{2}$, dovrà essere necessariamente $a = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\,(x+2)(x-6) = \frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x - 6$$

dato che il termine noto è uguale a -6, mentre doveva essere uguale a 5, ***il problema non ha soluzione, ovvero non esiste un polinomio con le condizioni assegnate.***

Esercizio 17. Intanto scriviamo un numero multiplo di 47 come differenza di due quadrati:

$$(50 + 3) \cdot (50 - 3) = 50^2 - 3^2$$

a questo punto possiamo moltiplicare il tutto per un quadrato perfetto molto grande, per esempio $100^2 = 10000$:

$$10000 \cdot (50^2 - 3^2) \tag{2}$$

si osserva che il numero appena scritto è multiplo di 47 ed è maggiore di 10000 (in quanto è prodotto di 10000 per un numero maggiore di 1); dimostriamo ora che il numero (2) è differenza di due quadrati:

$$100^2 \cdot (50^2 - 3^2) = 100^2 \cdot 50^2 - 100^2 \cdot 3^2 = (100 \cdot 50)^2 - (100 \cdot 3)^2 \ .$$

Per concludere l'esercizio (vogliamo un numero negativo; per il momento ci siamo occupati del suo valore assoluto) è sufficiente cambiare di segno il numero (2):

$$-10000 \cdot (50^2 - 3^2) \ .$$

Per la cronaca:

$$-10000 \cdot (50^2 - 3^2) = -24910000 = 47 \cdot (-530000) \ .$$

Esercizio 18. Si osserva che una radice del polinomio $[x^3 + (-k-2)\,x^2 + (2\,k - 8)\,x + 8\,k]$ è $x = k$:

$$k^3 + (-k-2)\,k^2 + (2\,k-8)\,k + 8\,k = k^3 - k^3 - 2\,k^2 + 2\,k^2 - 8\,k + 8\,k = 0 \ .$$

Dividendo il polinomio assegnato per $(x - k)$ si ha:

$$x^3 + (-k-2)\,x^2 + (2\,k-8)\,x + 8\,k = (x-k)(x^2 - 2\,x - 8) \ ;$$

fattorizzando il polinomio quoziente di secondo grado (ha per radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$) otteniamo:

$$x^2 - 2\,x - 8 = (x+2)(x-4) \ ;$$

mettendo tutto assieme possiamo finalmente scrivere la fattorizzazione del polinomio di partenza:

$$x^3 + (-k-2)\,x^2 + (2\,k-8)\,x + 8\,k = (x-k)(x+2)(x-4) \ .$$

Si osserva che il polinomio dato ha per radici $x = -2$ ***e*** $x = 4$ ***indipendentemente dal valore di*** k***.***

Esercizio 19. Un numero che finisce per 2 può essere scritto nella forma $10\,x+2$, per cui abbiamo:

$$(10\,x + 2)^3 = 1000\,x^3 + 600\,x^2 + 120\,x + 8$$

i primi tre termini sono multipli di 10, quindi l'ultima cifra è uguale a 8.
Per quanto riguarda la penultima cifra (quella alla sinistra di 8) possiamo mettere in evidenza 10 nei primi tre termini:

$$(10\,x + 2)^3 = 10 \cdot \big(100\,x^3 + 60\,x^2 + 12\,x\big) + 8$$

la cifra che sta alla sinistra di 8 è l'ultima cifra del numero che sta dentro la parentesi nell'ultima espressione scritta; d'altra parte il numero tra parentesi risulta essere somma di numeri pari, quindi sarà pari e, in particolare, finirà per una cifra pari.

Esercizio 20. Il numero $5^{347} + 7^{234}$ è un numero pari in quanto risulta essere somma di due numeri dispari (si ricorda che la potenza di un numero dispari è dispari).

Esercizio 21. Si osserva che i numeri della forma $4\,n+3$ sono tutti dispari in quanto sono ottenuti sommando un numero pari con 3; supponiamo che esista un numero y tale che:

$$4\,n + 3 = y^2 \tag{3}$$

anche y deve essere dispari perché il quadrato di un numero dispari è dispari (e il quadrato di un numero pari è un numero pari). Quindi y avrà la forma seguente:

$$y = 2\,k + 1$$

sostituendo nella (3) abbiamo:

$$4\,n + 3 = (2\,k + 1)^2$$

svolgendo il quadrato otteniamo:

$$4\,n + 3 = 4\,k^2 + 4\,k + 1$$

togliendo 1 ad entrambi i numeri abbiamo:

$$4\,n + 2 = 4\,k^2 + 4\,k \tag{4}$$

se dividiamo entrambi i numeri per 4 abbiamo:

$$n + \frac{1}{2} = k^2 + k$$

a sinistra abbiamo un numero che non è intero (è infatti somma di un numero intero con 1/2), mentre a destra abbiamo un numero intero. Abbiamo trovato una contraddizione perché non possiamo avere un numero che è allo stesso tempo intero e non intero: ciò significa che non possono esistere quadrati perfetti della forma $4\,n + 3$.
In realtà abbiamo dimostrato anche che i quadrati perfetti dispari sono tutti della forma $4\,n + 1$ (si ricorda che i numeri dispari si possono scrivere o nella forma $4\,n + 1$ o nella forma $4\,n + 3$ e questo per il semplice fatto che, dividendo un numero dispari per 4, otteniamo come resto 1 oppure 3).

Verifica scritta 1 B Scientifico 24/01/2009

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10.
Gli asterischi tra parentesi indicano il grado di difficoltà degli esercizi:
(*) facile ; (**) medio ; (***) impegnativo ; (****) difficile.

Esercizio 1. (*) Consideriamo il polinomio $x+3\,x^4-5\,xy^2+y$; è ordinato? E' completo? E' omogeneo?

Esercizio 2. (*) Calcola 110^3 utilizzando i prodotti notevoli.

Esercizio 3. (*) Determina quoziente e resto della divisione polinomiale $(x-x^3+1):(x^2+3)$ e verifica i risultati ottenuti.

Esercizio 4. (*) Svolgi l'espressione $(x-y)^3-(-x+2\,y-1)(x-1-2\,y)$.

Esercizio 5. (*) Svolgi $(2\,x-xy^2)^5$ facendo riferimento al triangolo di Tartaglia. Calcola il valore dell'espressione per $x=-1$ e $y=1$.

Esercizio 6. (*) Determina le radici del polinomio $-2\,x^2-16\,x-30$ utilizzando la regola del prodotto e della somma.

Esercizio 7. (*) Fattorizza il polinomio $4\,x^4-8\,x^2+4$.

Esercizio 8. (*) Fattorizza il polinomio $-\dfrac{1}{2}\,x^2-\dfrac{1}{2}\,x+\dfrac{3}{8}$.

Esercizio 9. (*) Verifica che $x_1=2$ e $x_2=-3$ sono due radici del polinomio $x^4+2\,x-4\,x^2-12+x^3$; si trovi, infine, una fattorizzazione del polinomio.

Esercizio 10. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quinto grado tale che, se lo dividiamo per il polinomio (x^4-3), il resto della divisione polinomiale è $(-2\,x^2+x)$.

Esercizio 11. (**) Determinare, se possibile, un polinomio avente entrambe le seguenti proprietà: a) è divisibile per i binomi $(x-2)$ e $(x+1)$; b) il resto della divisione per $(x+5)$ è uguale a 1.

Esercizio 12. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado avente per uniche radici $x_1=-1$ e $x_2=2$ e con il coefficiente di x^2 uguale a -10.

Esercizio 13. (**) Determina, se possibile, k in modo tale che il polinomio $x^3-x^2-2\,k\,x$ abbia come radice $x=-1$. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

Esercizio 14. (**) Dimostrare con l'algoritmo della divisione polinomiale la seguente formula:

$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)\ .$$

Esercizio 15. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado tale che soddisfi entrambe le seguenti condizioni: a) può essere scritto come prodotto di due polinomi aventi grado maggiore o uguale di 1; b) non ha radici.

Esercizio 16. (***) Determinare, se possibile, un polinomio di secondo grado tale che abbia per radice $x=4$ e risulti divisibile per (x^2-4).

Esercizio 17. (***) Scrivi un polinomio di quinto grado avente come unica radice $x=-2$ e avente il coefficiente di x^4 uguale a 3.

Esercizio 18. (***) Qual è l'ultima cifra del prodotto $123456789\cdot 987654321$? Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 19. (***) Determina, se possibile, un valore per h e un valore per k affinché il polinomio $x^3-(h+k)\,x^2-3\,x+k+1$ abbia per radici $x_1=0$ e $x_2=3$.

Esercizio 20. (****) Consideriamo due numeri di tre cifre aventi la cifra 2 nel posto centrale e tali che l'uno si ottiene dall'altro scambiando la prima con la terza cifra. Dimostrare che, calcolando la differenza tra il quadrato del numero maggiore e il quadrato del numero minore, si ottiene un multiplo di 99.

Esercizio 21. (****) Quanti sono i quadrati perfetti che finiscono per 56 ?

Soluzioni della verifica scritta 1 B Scientifico 24/01/2009

Esercizio 1. Il polinomio $x + 3\,x^4 - 5\,xy^2 + y$ non è ordinato né rispetto a x nè rispetto a y. E' completo rispetto a y ma non rispetto a x. Non è omogeneo.

Esercizio 2. $110^3 = (11 \cdot 10)^3 = 10^3 \cdot 11^3 = 10^3 \cdot (10+1)^3 = 10^3 \cdot (10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1) = 10^3 \cdot (1331) = 1331000$.

Esercizio 3. $(x - x^3 + 1) = (x^2 + 3)(-x) + (4\,x + 1)$.
Quindi il polinomio quoziente è $Q(x) = -x$ e il polinomio resto è $R(x) = 4\,x + 1$.

Esercizio 4. $(x-y)^3 - (-x + 2\,y - 1)(x - 1 - 2\,y) = x^3 - 3\,x^2y + 3\,xy^2 - y^3 + x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 - 1$.

Esercizio 5. $\left(2\,x - xy^2\right)^5 = 32\,x^5 - 80\,x^5y^2 + 80\,x^5y^4 - 40\,x^5y^6 + 10\,x^5y^8 - x^5y^{10}$. Per calcolare il valore dell'espressione per $x = -1$ e $y = 1$ basta sostituire nell'espressione iniziale:

$$\big(2 \cdot (-1) - (-1) \cdot (1)^2\big)^5 = (-1)^5 = -1 \; .$$

Esercizio 6. Per prima cosa mettiamo -2 in evidenza:

$$-2\,x^2 - 16\,x - 30 = (-2)(x^2 + 8\,x + 15) \; ;$$

utilizzando la regola del prodotto e della somma per il polinomio tra parentesi abbiamo:

$$\text{somma} = -8 \;\; ; \;\; \text{prodotto} = 15$$

si vede facilmente che le due radici sono:

$$x_1 = -3 \;\; ; \;\; x_2 = -5 \; ;$$

il polinomio dato può essere quindi fattorizzato nel modo seguente:

$$-2\,x^2 - 16\,x - 30 = -2\,(x+3)(x+5) \; .$$

Esercizio 7. Per prima cosa mettiamo in evidenza 4:

$$4\,x^4 - 8\,x^2 + 4 = 4(x^4 - 2\,x^2 + 1) \; ;$$

è facile osservare che il polinomio $x^4 - 2\,x^2 + 1$ è il quadrato del binomio $(x^2 - 1)$:

$$x^4 - 2\,x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 \; .$$

Ora, dato che $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, abbiamo:

$$x^4 - 2\,x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 = \big((x+1)(x-1)\big)^2 = (x+1)^2(x-1)^2 \; ;$$

la fattorizzazione del polinomio assegnato è

$$4\,x^4 - 8\,x^2 + 4 = 4\,(x+1)^2(x-1)^2 \; .$$

Esercizio 8. Moltiplichiamo e dividiamo per 8:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(-4x^2 - 4x + 3\right) \ ;$$

passiamo ora alla fattorizzazione del polinomio primitivo $(-4x^2 - 4x + 3)$; si trova che ha per radici

$$x_1 = \frac{1}{2} \ ; \ x_2 = -\frac{3}{2}$$

quindi abbiamo:

$$-4x^2 - 4x + 3 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \ .$$

In definitiva la fattorizzazione del polinomio iniziale è:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \cdot \left(-4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) \ ,$$

perciò risulta:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \ .$$

Esercizio 9. Possiamo risolvere l'esercizio in questo modo: dividiamo il polinomio $(x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12)$ per il polinomio $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$; si trova che la divisione è esatta ed il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 + 2$. Ciò fornisce la verifica del fatto che $x = 2$ e $x = -3$ sono due radici del polinomio assegnato. A questo punto possiamo scrivere:

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 = (x-2)(x+3)(x^2+2) \ ;$$

dato che il polinomio (x^2+2) non ha radici (è infatti somma di 2 con una quantità non negativa) abbiamo trovato la fattorizzazione del polinomio.

Esercizio 10. Basta considerare il polinomio $x(x^4 - 3) + (-2x^2 + x) = x^5 - 2x^2 - 2x$.

Esercizio 11. Considero i polinomi di secondo grado della forma $a(x-2)(x+1) = a(x^2 - x - 2)$; poiché il resto della divisione per $(x+5)$ deve uguale a 1, risulta:

$$a(x^2 - x - 2) = Q(x) \cdot (x+5) + 1$$

dove $Q(x)$ è il polinomio quoziente (evidentemente approssimato, dato che il resto è 1). Poiché sostituendo $x = -5$ a destra otteniamo come risultato 1, dobbiamo ottenere 1 anche sostituendo $x = -5$ a sinistra:

$$a \cdot ((-5)^2 - (-5) - 2) = 1$$

e quindi:

$$a \cdot 28 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{28} \ ;$$

in definitiva il polinomio risulta essere:

$$\frac{1}{28}(x^2 - x - 2) = \frac{1}{28}x^2 - \frac{1}{28}x - \frac{1}{14} \ .$$

Esercizio 12. Consideriamo il polinomio di quarto grado seguente:

$$(x-2)(x+1)^3 \tag{1}$$

il polinomio scritto ha radici $x = 2$ e $x = -1$. Se svolgiamo il prodotto troviamo:

$$(x-2)(x+1)^3 = x^4 + x^3 - 3\,x^2 - 5\,x - 2$$

il coefficiente di x^2 è uguale a -3; poiché deve essere uguale a -10, dobbiamo moltiplicare il polinomio (1) per $\dfrac{10}{3}$. Un polinomio (ma non è l'unico) che risolve il problema è il seguente:

$$\frac{10}{3}\,(x-2)(x+1)^3 = \frac{10}{3}\,x^4 + \frac{10}{3}\,x^3 - 10\,x^2 - \frac{50}{3}\,x - \frac{20}{3}\ .$$

Esercizio 13. Visto che $x = -1$ deve essere radice del polinomio $x^3 - x^2 - 2\,k\,x$, deve risultare:

$$(-1)^3 - (-1)^2 - 2\,k \cdot (-1) = 0$$

e quindi

$$2\,k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1\ ;$$

quindi il polinomio da fattorizzare è:

$$x^3 - x^2 - 2\,x\ .$$

Possiamo mettere x in evidenza:

$$x(x^2 - x - 2)$$

a questo punto, sfruttando il fatto che $x = -1$ è una radice del polinomio di secondo grado nella parentesi, possiamo sfruttare la formula per il prodotto delle radici, ricavando l'altra radice: $x = 2$. In definitiva abbiamo:

$$x^3 - x^2 - 2\,x = x(x-2)(x+1)\ .$$

Esercizio 14. Basta eseguire la divisione polinomiale

$$(x^5 - y^5) : (x - y)$$

rispetto a x o rispetto a y. Si trova che la divisione è esatta ed il polinomio quoziente è proprio $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$.

Esercizio 15. Basta considerare il polinomio seguente:

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2)\ ;$$

i due polinomi nelle parentesi non hanno radici.

Esercizio 16. Un tale polinomio di secondo grado non esiste. Risultando infatti divisibile per $(x^2 - 4)$, ammetterebbe per radici $x = 2$ e $x = -2$; dovendo inoltre avere per radice $x = 4$, avrebbe tre radici; ma ***un polinomio di secondo grado può avere al massimo due radici.***

Esercizio 17. Scriviamo intanto il polinomio

$$(x^4+1)(x+2)\ ; \tag{2}$$

esso è di quinto grado ed ha come unica radice $x=-2$; svolgendo il prodotto si trova:

$$x^5+2\,x^4+x+2$$

il coefficiente di x^4 è uguale a 2; poiché il testo dell'esercizio richiede che il coefficiente di x^4 risulti uguale a 3, dobbiamo moltiplicare per $\dfrac{3}{2}$ il polinomio (2), ottenendo così:

$$\frac{3}{2}\,(x^4+1)(x+2)=\frac{3}{2}\,x^5+3\,x^4+\frac{3}{2}\,x+3\ .$$

Altra soluzione: consideriamo il polinomio

$$(x+2)^5 \tag{3}$$

osserviamo che ha per unica radice $x=-2$; sviluppando con Tartaglia abbiamo:

$$(x+2)^5=x^5+10\,x^4+40\,x^3+80\,x^2+80\,x+32$$

per la stessa ragione esposta in precedenza per il primo metodo, dobbiamo moltiplicare il polinomio (3) per $\dfrac{3}{10}$:

$$\frac{3}{10}\,(x+2)^5=\frac{3}{10}\,x^5+3\,x^4+12\,x^3+24\,x^2+24\,x+\frac{48}{5}\ .$$

Esercizio 18. Dobbiamo calcolare l'ultima cifra del prodotto seguente: $123456789\cdot 987654321$. Ragioniamo così:

$$123456789=10\,x+9\ \ ;\ \ 987654321=10\,y+1$$

moltiplicando i due binomi al posto dei due numeri troviamo:

$$(10\,x+9)(10\,y+1)=100\,xy+10\,x+90\,y+9$$

i primi tre termini sono multipli di 10, quindi l'ultima cifra della moltiplicazione è 9.

Esercizio 19. Dato che il polinomio $x^3-(h+k)\,x^2-3\,x+k+1$ deve avere per radice $x=0$ deve risultare necessariamente $k+1=0$ e quindi $k=-1$. Ora imponiamo che il polinomio abbia per radice $x=3$:

$$3^3-(h-1)\,(3)^2-3\cdot 3=0\quad\Rightarrow\quad 27-9\,h=0$$

da cui si ricava facilmente il valore $h=3$. Il polinomio, quindi, è il seguente:

$$x^3-2\,x^2-3\,x\ ;$$

per la cronaca, il polinomio si fattorizza nel modo seguente:

$$x^3-2\,x^2-3\,x=x(x+1)(x-3)\ .$$

Esercizio 20. I due numeri N_1, N_2 si possono scrivere così:

$$N_1 = 100\,a + 20 + b \;\; ; \;\; N_2 = 100\,b + 20 + a$$

con a e b interi compresi tra 1 e 9 (compresi). Supponiamo che $N_1 > N_2$ (e quindi $a > b$); scrivendo la differenza dei due quadrati abbiamo:

$$N_1^2 - N_2^2 = (100\,a + 20 + b)^2 - (100\,b + 20 + a)^2 = 9999\,a^2 + 3960\,a - 3960\,b - 9999\,b^2$$

osservando che $9999 = 99 \cdot 101$ e $3960 = 99 \cdot 40$, abbiamo:

$$(100\,a + 20 + b)^2 - (100\,b + 20 + a)^2 = 99 \cdot 101\left(a^2 - b^2\right) + 99 \cdot 40(a - b) =$$

$$= 99 \cdot \left[101\left(a^2 - b^2\right) + 40(a - b)\right]$$

e quindi abbiamo concluso la dimostrazione.
Si osservi che è possibile fattorizzare l'ultima espressione anche nel modo seguente:

$$99(a - b)(101\,a + 40 + 101\,b)\;.$$

Esercizio 21. Notiamo subito che

$$(16)^2 = 256\;;$$

ora, se consideriamo il quadrato dei numeri della forma

$$100\,x + 16$$

abbiamo:

$$(100\,x + 16)^2 = 10000\,x^2 + 3200\,x + 256$$

indipendentemente da x, i primi due addendi sono multipli di 100, quindi le ultime due cifre sono necessariamente 56. Poiché x può essere qualsiasi numero naturale, abbiamo infiniti quadrati perfetti con la proprietà desiderata.