

# Verifica scritta 1 B Scientifico 28/02/2009

Prof. Francesco Daddi

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10. Punteggio di partenza = 1/10.

**Esercizio 1.** Fattorizza il seguente polinomio:  $(x - 2)^2 - 2(x + 1)(x - 2)$

**Esercizio 2.** Fattorizza il seguente polinomio:  $(1 - x)(x + 2) - 4x(x - 1)^2$

**Esercizio 3.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^2 + 4x + 4 + 9(-4x^2 + 12x - 9)$

**Esercizio 4.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^6 - 8$

**Esercizio 5.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^4 - 16y^4 - (x - 2y)(x + 2y)^2$

**Esercizio 6.** Fattorizza il seguente polinomio:  $(y - 3x)^2 + 2(x + 1)(3x - y) + x^2 + 1 + 2x$

**Esercizio 7.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^2ay^2 + 2xay^2 + ay^2$

**Esercizio 8.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^7 - 4x^5 + x^3 - 4x$

**Esercizio 9.** Fattorizza il seguente polinomio:  $8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 27$

**Esercizio 10.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^2y + xy + a^3x^2 + a^3x$

**Esercizio 11.** Fattorizza il seguente polinomio:  $4(4x - x^2 - 3) - (x - 1)^2(2x^2 + 4x - 6)$

**Esercizio 12.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^3(x - 1)^2 - 3x^2(x - 1)^2 + (x - 1)x^3 - 3(x - 1)x^2$

**Esercizio 13.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^2 - 4xy + 6xz + 4y^2 - 12yz + 9z^2$

**Esercizio 14.** Fattorizza il seguente polinomio:  $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

**Esercizio 15.** Fattorizza il seguente polinomio:  $a^4 - 1 + a^4 + a^3$

**Esercizio 16.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^2 - 2xy + 10x + y^2 - 10y + 21$

**Esercizio 17.** Fattorizza il seguente polinomio:  $8x^2 - 8xy - 6y^2$

**Esercizio 18.** Scrivi un polinomio di quarto grado avente come uniche radici  $x = 1$ ,  $x = 2$  e  $x = -3$  e con coefficiente direttivo uguale a  $-\frac{7}{3}$ .

**Esercizio 19.** Determina  $k$  in modo tale che il polinomio  $x^3 - kx^2 - x + k$  abbia  $x = 2$  come radice. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

**Esercizio 20.** Dire se il numero  $729^{13} + 64$  è primo. Motiva la risposta.

**Esercizio 21.** Dimostra che i numeri della forma  $x^8 + 4$  (dove  $x$  è un numero intero  $> 1$ ) non sono primi.

## Soluzioni verifica 1 B Scientifico 28 febbraio 2009 fila 1

```

> (x - 2)^2 - 2*(x + 1)*(x - 2);factor(%);
      (x - 2)^2 - 2(x + 1)(x - 2)
      -(x + 4)(x - 2)

> (1 - x)*(x + 2) - 4*x*(x - 1)^2;factor(%);
      (1 - x)(x + 2) - 4x(x - 1)^2
      -(x - 1)(4x^2 - 3x + 2)

> x^2 + 4*x + 4 + 9*(-4*x^2 + 12*x - 9);factor(%);
      -35x^2 + 112x - 77
      -7(x - 1)(5x - 11)

> x^6-8;factor(%);
      x^6 - 8
      (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)

> x^4 - 16*y^4 - (x - 2*y)*(x + 2*y)^2;factor(%);
      x^4 - 16y^4 - (x - 2y)(x + 2y)^2
      (x - 2y)(x + 2y)(x^2 - x - 2y + 4y^2)

> (y - 3*x)^2 + 2*(x + 1)*(3*x - y) + x^2 + 1 + 2*x;factor(%);
      (y - 3x)^2 + 2(x + 1)(3x - y) + x^2 + 1 + 2x
      (4x - y + 1)^2

> x^2 *a * y^2 + 2*x * a * y^2 + a * y^2;factor(%);
      x^2 a y^2 + 2x a y^2 + a y^2
      a y^2 (x + 1)^2

> x^7 - 4*x^5 + x^3 - 4*x;factor(%);
      x^7 - 4x^5 + x^3 - 4x
      x(x - 2)(x + 2)(x^4 + 1)

> 8*(x^3 - 3*x^2 + 3*x - 1) - 27;factor(%);
      8x^3 - 24x^2 + 24x - 35
      (2x - 5)(4x^2 - 2x + 7)

> x^2 *y + x *y + a^3 *x^2 + a^3 *x;factor(%);
      x^2 y + x y + a^3 x^2 + a^3 x
      x(y + a^3)(x + 1)

> 4*(4*x - x^2 - 3) - (x - 1)^2 *(2*x^2 + 4*x - 6);factor(%);
      16x - 4x^2 - 12 - (x - 1)^2 (2x^2 + 4x - 6)
      -2(x - 1)(x + 1)(x^2 - 3)

> x^3*(x - 1)^2 - 3*x^2 *(x - 1)^2 + (x - 1)*x^3 - 3*(x - 1)
*x^2;factor(%);

```

$$x^3(x-1)^2 - 3x^2(x-1)^2 + (x-1)x^3 - 3(x-1)x^2$$

$$x^3(x-1)(x-3)$$

> **x^2 - 4\*x\*y + 6\*x\*z + 4\*y^2 - 12\*y\*z + 9\*z^2;factor(%);**

$$x^2 - 4xy + 6xz + 4y^2 - 12yz + 9z^2$$

$$(x - 2y + 3z)^2$$

> **2\*x^3 - 9\*x^2 + 7\*x + 6;factor(%);**

$$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$$

$$(x - 2)(x - 3)(2x + 1)$$

> **a^4 - 1 + a^4 + a^3;factor(%);**

$$2a^4 - 1 + a^3$$

$$(a + 1)(2a^3 - a^2 + a - 1)$$

> **x^2 - 2\*x\*y + 10\*x + y^2 - 10\*y + 21;factor(%);**

$$x^2 - 2xy + 10x + y^2 - 10y + 21$$

$$(x - y + 7)(x - y + 3)$$

> **8\*x^2 - 8\*x\*y - 6\*y^2;factor(%);**

$$8x^2 - 8xy - 6y^2$$

$$2(2x + y)(2x - 3y)$$

>> **-7/3\*(x-1)^2\*(x-2)\*(x+3);expand(%);**

$$-\frac{7(x-1)^2(x-2)(x+3)}{3}$$

$$-\frac{7}{3}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{49}{3}x^2 - \frac{91}{3}x + 14$$

> **x^3-2\*x^2-x+2;factor(%);**

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

>> **729^13 + 64;ifactor(%);x^39+64;factor(%);**

$$16423203268260658146231467800709255353$$

$$(13) (1381) (141584461) (2548848971821) (10387537) (244033)$$

$$x^{39} + 64$$

$$(x^{13} + 4)(x^{26} - 4x^{13} + 16)$$

> **x^8+4;factor(%);**

$$x^8 + 4$$

$$(x^4 - 2x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 2)$$

# Verifica scritta 1A Scientifico 03/03/2009

Prof. Francesco Daddi

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10. Punteggio di partenza = 1/10.

**Esercizio 1.** Fattorizza il seguente polinomio:  $(x + 1)^2 + 2(x + 1)^3(x + 2)$

**Esercizio 2.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^8 - 1$

**Esercizio 3.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^2 - 4y^2 + 2(x + 2y)(x - 1)$

**Esercizio 4.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^3 - y^3 - (y - x)^2(y + x)$

**Esercizio 5.** Fattorizza il seguente polinomio:  $ab + b^2 - (a + b)^2 - 3(a + b)^3$

**Esercizio 6.** Fattorizza il seguente polinomio:  $10x^2y - 25xy^2 - x^3 - 2(5y - x)^3$

**Esercizio 7.** Fattorizza il seguente polinomio:  $a^4b - 2a^2b - c^2(a^2 - 2)^2$

**Esercizio 8.** Fattorizza il seguente polinomio:  $4a^4 - 28a^3b + 12a^2b^2 - 42ab^3 + 9b^4$

**Esercizio 9.** Fattorizza il seguente polinomio:  $(x - 2y)^2 - (x + 1)^4$

**Esercizio 10.** Fattorizza il seguente polinomio:  $(x + 4)^2 + x^3 - x^2 - 20x$

**Esercizio 11.** Fattorizza il seguente polinomio:  $(a - 2b)^2 - 2(a + b)(a - 2b) + a^2 - 4b^2$

**Esercizio 12.** Fattorizza il seguente polinomio:  $-8x^3 - 12yx^2 - 6y^2x - y^3$

**Esercizio 13.** Fattorizza il seguente polinomio:  $a^2x(y + 2) - a^2x + 4(y^2 + 4y + 3)$

**Esercizio 14.** Fattorizza il seguente polinomio:  $x^4 - 5x^3 + x - 5$

**Esercizio 15.** Fattorizza il seguente polinomio:  $6x^2 - 22yx + 20y^2$

**Esercizio 16.** Fattorizza il seguente polinomio:  $9x^6 + 30x^3 + 25 - y^4 - 2x^2y^2 - x^4$

**Esercizio 17.** Fattorizza il seguente polinomio:  $25x^2 - 10x + 5ax + 1 - a$

**Esercizio 18.** In che modo possono essere scritti tutti i polinomi di terzo grado aventi come radici  $x = -3$ ,  $x = 5$  e  $x = -6$  ?

**Esercizio 19.** Determina un polinomio di secondo grado con le seguenti proprietà: ha per radice  $x = 2$ , se diviso per  $(x - 1)$  il resto della divisione è uguale a 1, mentre se viene diviso per  $x$  il resto è uguale a  $-1$ .

**Esercizio 20.** Dire se il numero  $81^{10} - 77^{10}$  è primo. Motiva la risposta.

**Esercizio 21.** Dimostra che, se  $a$  non è divisibile né per 2 né per 3, allora il numero  $(a^2 - 1)$  è divisibile per 24.

## Soluzioni verifica 1A Scientifico 3 marzo 2009 (fila 1)

- >  $(x+1)^2 + 2(x+1)^3(x+2)$ ; **factor(%)** ;  
 $(x+1)^2 + 2(x+1)^3(x+2)$   
 $(2x^2 + 6x + 5)(x+1)^2$
- >  $x^8 - 1$ ; **factor(%)** ;  
 $x^8 - 1$   
 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
- >  $x^2 - 4y^2 + 2(x+2y)(x-1)$ ; **factor(%)** ;  
 $x^2 - 4y^2 + 2(x+2y)(x-1)$   
 $(x+2y)(3x-2-2y)$
- >  $x^3 - y^3 - (y-x)^2(y+x)$ ; **factor(%)** ;  
 $x^3 - y^3 - (y-x)^2(y+x)$   
 $y(x+2y)(x-y)$
- >  $ab + b^2 - (a+b)^2 - 3(a+b)^3$ ; **factor(%)** ;  
 $ab + b^2 - (a+b)^2 - 3(a+b)^3$   
 $-(a+b)(3b^2 + 6ab + a + 3a^2)$
- >  $10x^2y - 25xy^2 - x^3 - 2(5y-x)^3$ ; **factor(%)** ;  
 $10yx^2 - 25y^2x - x^3 - 2(5y-x)^3$   
 $(x-10y)(x-5y)^2$
- >  $a^4b - 2a^2b - c^2(a^2-2)^2$ ; **factor(%)** ;  
 $a^4b - 2a^2b - c^2(a^2-2)^2$   
 $-(a^2-2)(c^2a^2 - a^2b - 2c^2)$
- >  $4a^4 - 28a^3b + 12a^2b^2 - 42ab^3 + 9b^4$ ; **factor(%)** ;  
 $4a^4 - 28a^3b + 12a^2b^2 - 42ab^3 + 9b^4$   
 $(2a^2 + 3b^2)(2a^2 - 14ab + 3b^2)$
- >  $(x-2y)^2 - (x+1)^4$ ; **factor(%)** ;  
 $(x-2y)^2 - (x+1)^4$   
 $-(2y+x+x^2+1)(-2y+3x+x^2+1)$
- >  $(x+4)^2 + x^3 - x^2 - 20x$ ; **factor(%)** ;  
 $(x+4)^2 + x^3 - x^2 - 20x$   
 $(x+4)(x-2)^2$
- >  $(a-2b)^2 - 2(a+b)(a-2b) + a^2 - 4b^2$ ; **factor(%)** ;  
 $(a-2b)^2 - 2(a+b)(a-2b) + a^2 - 4b^2$   
 $2b(-a+2b)$
- >  $-8x^3 - 12y^2x^2 - 6y^2x - y^3$ ; **factor(%)** ;

$$-8x^3 - 12yx^2 - 6y^2x - y^3$$

$$-(2x+y)^3$$

$$> a^2*x*(y+2) - a^2*x+4*(y^2+4*y+3); factor(%);$$

$$a^2x(y+2) - a^2x + 4y^2 + 16y + 12$$

$$(y+1)(4y+12+a^2x)$$

$$> x^4-5*x^3+x-5; factor(%);$$

$$x^4 - 5x^3 + x - 5$$

$$(x-5)(x+1)(x^2-x+1)$$

$$> 6*x^2-22*y*x+20*y^2; factor(%);$$

$$6x^2 - 22yx + 20y^2$$

$$2(3x-5y)(x-2y)$$

$$> 9*x^6+30*x^3+25-y^4-2*x^2*y^2-x^4; factor(%);$$

$$9x^6 + 30x^3 + 25 - y^4 - 2x^2y^2 - x^4$$

$$(y^2 + 5 + x^2 + 3x^3)(-y^2 + 5 - x^2 + 3x^3)$$

$$> 25*x^2-10*x+5*a*x+1-a; factor(%);$$

$$25x^2 - 10x + 1 + 5ax - a$$

$$(5x-1)(5x-1+a)$$

$$> a*(x+3)*(x-5)*(x+6);$$

$$a(x+3)(x-5)(x+6)$$

$$> expand(-3/2*(x-2)*(x-1/3));$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1$$

$$> 81^(10)-77^(10); ifactor(%);$$

$$4830984986470728152$$

$$(2)^3 (79) (991) (196771) (39199801)$$

$$> x^10-y^10; factor(%);$$

$$x^{10} - y^{10}$$

$$(x-y)(y+x)(x^4+yx^3+x^2y^2+y^3x+y^4)(x^4-yx^3+x^2y^2-y^3x+y^4)$$

Il numero  $a$  è dispari, quindi  $(a+1)$  e  $(a-1)$  sono pari; inoltre uno dei due tra  $(a+1)$  e  $(a-1)$  è multiplo di 4. Quindi  $(a+1)(a-1)$  è multiplo di  $4 \times 2 = 8$ .

Il numero  $a$  non è multiplo di 3, quindi uno dei due tra  $(a+1)$  e  $(a-1)$  è multiplo di 3.

In definitiva abbiamo che  $(a+1)(a-1)$  è multiplo di  $8 \times 3 = 24$ .

# Verifica scritta 1B Scientifico 28/03/2009

Prof. Francesco Daddi

Punteggio di partenza = 2/10.

Gli esercizi 1 - 14 hanno punteggio = 0,45/10. Gli esercizi 15 - 18 hanno punteggio = 0,7/10.

**Esercizio 1.** Svolgi  $(x - y)^2 + 2(x^2 + y)^2$ .

**Esercizio 2.** Svolgi  $(y^2 - 2x^3)^5$ .

**Esercizio 3.** Fattorizza  $x^2 + 4x - 5$ ; sfrutta il risultato ottenuto per fattorizzare il polinomio  $x^4 + 4x^2 - 5$ .

**Esercizio 4.** Fattorizza  $x^3 - x^2 - 4x + 4$ .

**Esercizio 5.** Fattorizza  $4x^2 + 12xy + 8y^2$ .

**Esercizio 6.** Determina per quali valori di  $k$  il polinomio  $x^3 + 2x^2 + kx - k$  ha per radice  $x = -1$ . Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

**Esercizio 7.** Sapendo che  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{2}{3}$  e  $x_3 = \frac{6}{7}$  sono radici del polinomio  $-\frac{37}{4}x^3 + \frac{925}{84}x^2 + \frac{74}{21}x - \frac{37}{7}$ , si trovi una fattorizzazione del polinomio.

**Esercizio 8.** Sapendo che  $x_1 = 2$  e  $x_2 = -3$  sono radici del polinomio  $2x^3 - 6x^2 - 20x + 48$ , si trovi una fattorizzazione del polinomio. Scrivi tutte le radici del polinomio.

**Esercizio 9.** Fattorizza  $x^2 - (2a + 5a^2)x + 10a^3$ .

**Esercizio 10.** Svolgi  $\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{4x+4}{x+1}$ .

**Esercizio 11.** Svolgi  $\frac{x^3+1}{x+1} - \frac{1}{x^2-x+1}$ .

**Esercizio 12.** Svolgi  $\frac{1-b}{b^2-25} + \frac{2}{b+5} - 4$ .

**Esercizio 13.** Svolgi  $x+1 + \frac{5}{x^3+x^2-3x-3} + \frac{1}{(x^2-3)^2}$ .

**Esercizio 14.** Svolgi  $\frac{x}{y+3} - \frac{y}{2xy+6x-y-3} + \frac{2-2y}{-4xy+4x+2y-2}$ .

**Esercizio 15.** Uno studente oggi festeggia il suo sedicesimo compleanno; tra 9 anni avrà 25 anni, dopo altri 11 anni avrà 36 anni, dopo altri 13 ne avrà 49, e così via. E' un caso oppure c'è una spiegazione matematica per questo fatto?

**Esercizio 16.** Consideriamo un numero di tre cifre e il numero che si ottiene dal precedente scambiando le prime due cifre. Dimostra che la differenza dei loro quadrati è un multiplo di 180.

**Esercizio 17.** Dimostra che la differenza delle seste potenze di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 8. Dimostra inoltre che, considerando la somma al posto della differenza, otteniamo un numero pari ma non multiplo di 4.

**Esercizio 18.** Consideriamo il prodotto di cinque numeri interi consecutivi; dimostra che, sommando al numero ottenuto la quinta potenza del numero centrale, ricaviamo un numero dispari solo nel caso in cui il numero centrale è dispari.

# Soluzioni verifica scritta 1B Scient. 28/03/2009 (fila 1)

Prof. Francesco Daddi

**Esercizio 1.**  $(x - y)^2 + 2(x^2 + y)^2 = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x^4 + 4x^2y$ .

**Esercizio 2.**  $(y^2 - 2x^3)^5 = y^{10} - 10y^8x^3 + 40y^6x^6 - 80y^4x^9 + 80y^2x^{12} - 32x^{15}$ .

**Esercizio 3.**  $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$ ;  $x^4 + 4x^2 - 5 = (x^2 + 5)(x^2 - 1) = (x^2 + 5)(x + 1)(x - 1)$ .

**Esercizio 4.**  $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$ .

**Esercizio 5.**  $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 4(x + 2y)(x + y)$ .

**Esercizio 6.** Sostituendo il valore  $x = -1$  nel polinomio  $x^3 + 2x^2 + kx - k$  si trova  $k = \frac{1}{2}$ . Con la divisione polinomiale troviamo la fattorizzazione del polinomio:

$$x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x + 1) \left( x^2 + x - \frac{1}{2} \right).$$

**Esercizio 7.** Visto che il polinomio è di terzo grado, possiamo scrivere semplicemente:

$$-\frac{37}{4}x^3 + \frac{925}{84}x^2 + \frac{74}{21}x - \frac{37}{7} = -\frac{37}{4}(x - 1) \left( x + \frac{2}{3} \right) \left( x - \frac{6}{7} \right).$$

**Esercizio 8.** Poiché sappiamo che  $x_1 = 2$  e  $x_2 = -3$  sono due radici del polinomio, possiamo dividere il polinomio per  $(x - 2)(x + 3)$ : la divisione è esatta e il quoziente ci fornisce la terza radice. In definitiva si ottiene la seguente fattorizzazione:  $2x^3 - 6x^2 - 20x + 48 = 2(x - 2)(x + 3)(x - 4)$ . Le radici del polinomio, pertanto, sono:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 4$ .

**Esercizio 9.** Basta fare riferimento alla somma e al prodotto delle radici. Troviamo:

$$x^2 - (2a + 5a^2)x + 10a^3 = (x - 2a)(x - 5a^2).$$

**Esercizio 10.**  $\frac{x - 1}{x^2 - 1} + \frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4x + 5}{x + 1}$ .

**Esercizio 11.**  $\frac{x^3 + 1}{x + 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{(x^3 - 2x^2 + 3x - 2)x}{x^2 - x + 1}$ .

**Esercizio 12.**  $\frac{1 - b}{b^2 - 25} + \frac{2}{b + 5} - 4 = \frac{-4b^2 + b + 91}{b^2 - 25}$ .

**Esercizio 13.**  $x + 1 + \frac{5}{x^3 + x^2 - 3x - 3} + \frac{1}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 19x - 5}{(x^2 - 3)^2(x + 1)}$ .

**Esercizio 14.**  $\frac{x}{y + 3} - \frac{y}{2xy + 6x - y - 3} + \frac{2 - 2y}{-4xy + 4x + 2y - 2} = \frac{2x^2 - x + 3}{(2x - 1)(y + 3)}$ .

**Esercizio 15.** Basta analizzare la differenza tra due quadrati perfetti consecutivi:  $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$ ; si ottengono in questo modo tutti i numeri dispari.

**Esercizio 16.** I due numeri possono essere scritti nella seguente forma:  $(100x + 10y + z)$  e  $(100y + 10x + z)$ ; la differenza dei loro quadrati è  $(100x + 10y + z)^2 - (100y + 10x + z)^2 = 9900x^2 + 180xz - 9900y^2 - 180yz = 180(x - y)(55x + 55y + z)$ ; abbiamo ottenuto un multiplo di 180.

**Esercizio 17.** I due numeri dispari consecutivi possono essere scritti come  $2x + 1$  e  $2x - 1$ ; studiamo la differenza delle loro seste potenze:  $(2x + 1)^6 - (2x - 1)^6 = 8x(12x^2 + 1)(4x^2 + 3)$ ; si tratta di un multiplo di 8. Analizziamo ora la somma delle loro seste potenze:  $(2x + 1)^6 + (2x - 1)^6 = 2(4x^2 + 1)(16x^4 + 56x^2 + 1)$ ; si tratta di un prodotto in cui un fattore è 2 e gli altri sono dispari, quindi il numero ottenuto è pari ma non multiplo di 4.

**Esercizio 18.** Primo metodo: indicato con  $x$  il numero centrale, consideriamo l'espressione

$$(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) + x^5 = 2x^5 - 5x^3 + 4x = x(2x^4 - 5x^2 + 4);$$

nel caso in cui il numero centrale  $x$  è pari il numero ottenuto è ovviamente pari. Vediamo cosa succede nel caso in cui  $x$  è dispari: la parentesi  $(2x^4 - 5x^2 + 4)$  è dispari (i termini  $2x^4$  e  $4$  sono pari, mentre  $-5x^2$  è dispari) ed essendo moltiplicata per  $x$  (dispari), otteniamo un numero dispari.

Secondo metodo (migliore del precedente): osserviamo che il prodotto di cinque numeri consecutivi è sempre pari (tra i cinque numeri ci sono, infatti, almeno due pari). Se il numero centrale è pari, la somma è pari in quanto gli addendi sono entrambi pari; se il numero centrale è dispari, la somma è dispari in quanto la potenza di un dispari è dispari mentre il prodotto è, come già detto, pari.



# Verifica scritta 1A Scientifico 31/03/2009

Prof. Francesco Daddi

Punteggio di partenza = 2/10.

Gli esercizi 1 - 14 hanno punteggio = 0,45/10. Gli esercizi 15 - 18 hanno punteggio = 0,7/10.

**Esercizio 1.** Svolgi  $(x - 2y)(x + 2y) - 2(x - y)^2$ .

**Esercizio 2.** Svolgi  $(xy - 2x^2)^4$  utilizzando il triangolo di Tartaglia.

**Esercizio 3.** Fattorizza  $(x - 2)(y + 1) - (2 - x)^2(xy - 1)$ .

**Esercizio 4.** Fattorizza  $x^5 - x^3 - 4x^2 + 4$ .

**Esercizio 5.** Fattorizza  $a^2 - 8ab + 10a + 16b^2 - 40b + 24$ .

**Esercizio 6.** Determina per quali valori di  $k$  il polinomio  $x^4 + x^3 - 7x^2 - kx + 6$  ha per radice  $x = -3$ . Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

**Esercizio 7.** Tenendo conto del fatto che  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 5$  e  $x_3 = -3$  sono radici del polinomio  $-2x^5 + 8x^4 + 24x^3 - 68x^2 - 22x + 60$ , trova una fattorizzazione del polinomio. Scrivi infine tutte le radici del polinomio.

**Esercizio 8.** Scrivi un polinomio di secondo grado con le seguenti proprietà: ha per radici  $x_1 = 4$  e  $x_2 = 0$ ; il coefficiente della  $x$  è uguale a  $-7$ .

**Esercizio 9.** Calcola il quoziente e il resto della seguente divisione polinomiale:

$$((x^2 + 2x + 1)(3x - 2) - (x^2 + 5x + 4)(2 - x)) : (x + 1).$$

senza eseguire la divisione.

**Esercizio 10.** Svolgi  $\frac{3}{x} - \frac{4x^2}{x^3 + 1} + \frac{2}{x + 1}$

**Esercizio 11.** Svolgi  $\frac{2}{(3x + 1)^2} - \frac{4x}{1 + 3x}$

**Esercizio 12.** Svolgi  $\frac{6x - 2y + xy}{xy + 5x - 2y - 10} + \frac{2x - 1}{2 - x} - \frac{6y}{5 + y}$

**Esercizio 13.** Svolgi  $\left(\frac{2}{z + y} - \frac{2}{z - y}\right) : \frac{z^2}{z^2 - zy}$

**Esercizio 14.** Svolgi  $\frac{a^4 - 1}{a^4 - 4} \cdot \frac{a^4 + 2a^2}{a^4 - a^2} - \frac{3a^4 - 6a^2}{3a^4 - 9a^2} \cdot \frac{a^4 - 9}{a^4 - 4a^2 + 4}$

**Esercizio 15.** Dimostra che la somma dei quadrati di due numeri dispari è pari ma non può essere il quadrato di un numero pari.

**Esercizio 16.** Dimostra che un numero formato da 5 cifre uguali è multiplo di 271.

**Esercizio 17.** Dimostra che i numeri della forma  $4x^2 + 12x + 10$  sono tutti positivi.

**Esercizio 18.** Dimostra che la differenza delle seste potenze di due numeri dispari che differiscono di 10 è un multiplo di 40.

# Soluzioni verifica scritta 1A Scientifico 31/03/2009 (fila 1)

Prof. Francesco Daddi

**Esercizio 1.**  $(x - 2y)(x + 2y) - 2(x - y)^2 = -x^2 - 6y^2 + 4xy$ .

**Esercizio 2.**  $(xy - 2x^2)^4 = x^4y^4 - 8x^5y^3 + 24x^6y^2 - 32x^7y + 16x^8$ .

**Esercizio 3.**  $(x - 2)(y + 1) - (2 - x)^2(xy - 1) = (2 - x)(x^2y - 2xy - x - y + 1)$

**Esercizio 4.**  $x^5 - x^3 - 4x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x^3 - 4)$ .

**Esercizio 5.**  $a^2 - 8ab + 10a + 16b^2 - 40b + 24 = (4b - a - 5)^2 - 1 = (4b - a - 4)(4b - a - 6)$ .

**Esercizio 6.** Sostituendo  $x = -3$  si trova  $k = 1$ ; la fattorizzazione risulta essere:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3).$$

**Esercizio 7.** Eseguendo la divisione del polinomio assegnato per il polinomio  $(x + 1)(x - 5)(x + 3) = x^3 - x^2 - 17x - 15$ , si trova come quoziente  $-2x^2 + 6x - 4$ ; in definitiva, la fattorizzazione è  $-2x^5 + 8x^4 + 24x^3 - 68x^2 - 22x + 60 = -2(x + 1)(x - 5)(x + 3)(x - 1)(x - 2)$ . Le radici del polinomio sono  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = -3$ ,  $x_4 = 1$  e  $x_5 = 2$ .

**Esercizio 8.** Il polinomio è del tipo  $a(x - 4)x = ax^2 - 4ax$ ; per far sì che il coefficiente della  $x$  sia uguale a  $-7$ , è sufficiente scegliere  $a = \frac{7}{4}$ . In definitiva il polinomio è  $\frac{7}{4}x^2 - 7x$ .

**Esercizio 9.** Osservando che  $(x^2 + 2x + 1)(3x - 2) - (x^2 + 5x + 4)(2 - x) = (x + 1)^2(3x - 2) - (x + 1)(x + 4)(2 - x) = (x + 1)(4x^2 + 3x - 10)$ . Il quoziente della divisione, pertanto, è  $4x^2 + 3x - 10$ , mentre il resto è nullo.

**Esercizio 10.**  $\frac{3}{x} - \frac{4x^2}{x^3 + 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 3}{x(x + 1)(x^2 - x + 1)}$ .

**Esercizio 11.**  $\frac{2}{(3x + 1)^2} - \frac{4x}{1 + 3x} = \frac{2(1 - 6x^2 - 2x)}{(3x + 1)^2}$ .

**Esercizio 12.**  $\frac{6x - 2y + xy}{xy + 5x - 2y - 10} + \frac{2x - 1}{2 - x} - \frac{6y}{5 + y} = \frac{-7xy - 4x + 11y + 5}{(5 + y)(x - 2)}$ .

**Esercizio 13.**  $\left(\frac{2}{z + y} - \frac{2}{z - y}\right) : \frac{z^2}{z^2 - zy} = -\frac{4y}{z(z + y)}$ .

**Esercizio 14.**  $\frac{a^4 - 1}{a^4 - 4} \cdot \frac{a^4 + 2a^2}{a^4 - a^2} - \frac{3a^4 - 6a^2}{3a^4 - 9a^2} \cdot \frac{a^4 - 9}{a^4 - 4a^2 + 4} = -\frac{2}{a^2 - 2}$ .

**Esercizio 15.** Indicati con  $2x + 1$  e con  $2y - 1$  i due numeri dispari, sviluppiamo la somma dei loro quadrati:

$$(2x + 1)^2 + (2y - 1)^2 = 4x^2 + 4x + 2 + 4y^2 - 4y$$

si tratta di un numero pari ma non è un multiplo di 4 in quanto può essere scritto come  $4(x^2 + x + y^2 - y) + 2$ ; si giunge alla conclusione tenendo conto del fatto che il quadrato di un numero pari deve avere 4 come divisore.

**Esercizio 16.** Un numero con 5 cifre uguali può essere scritto così:  $10000g + 1000g + 100g + 10g + g = 11111g$ ; a questo punto basta osservare che  $11111 = 271 \cdot 41$ .

**Esercizio 17.** Dato che risulta  $4x^2 + 12x + 10 = (2x + 3)^2 + 1$ , si può concludere osservando che si tratta di una somma di 1 con una quantità non negativa.

**Esercizio 18.** Indicando con  $(2x + 5)$  e  $(2x - 5)$  i due dispari, notiamo che

$$(2x + 5)^6 - (2x - 5)^6 = 1920x^5 + 40000x^3 + 75000x = 40(48x^5 + 1000x^3 + 1875x).$$