Università di Pisa - Ingegneria Meccanica 2009/2010

Esercizi su rette, piani, Gauss, sottospazi

Esercizio 1. *Determinare delle equazioni cartesiane della retta r*

$$r:\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 4\,t \\ z = 2\,t \end{cases} \qquad \textit{Soluz.} \quad \begin{cases} 4\,x + y - 9 = 0 \\ 2\,x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. *Determinare delle equazioni parametriche della retta r*

$$r:\begin{cases} x - 2\,y + 4\,z = 1 \\ 2\,x - y - 3\,z = -2 \end{cases} \qquad \textit{Soluz.} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} + 10\,t \\ y = -\dfrac{4}{3} + 11\,t \\ z = 3\,t \end{cases}$$

Esercizio 3. *Determinare delle equazioni parametriche del piano π*

$$\pi : 2\,x + y - 5\,z + 3 = 0 \qquad \textit{Soluz.} \quad \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2\,t + 5\,s \\ z = s \end{cases}$$

Esercizio 4. *Determinare l'equazione cartesiana del piano π*

$$\pi:\begin{cases} x = 2 + t - 2\,s \\ y = 1 - 2\,t + s \\ z = -4 + 3\,t - s \end{cases} \qquad \textit{Soluz.} \quad x + 5\,y + 3\,z + 5 = 0\,.$$

Esercizio 5. *Risolvere il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} 2\,x + y = -1 \\ x + 8\,y - 5\,z = 2 \\ x + 5\,y - 3\,z = 1 \end{cases} \qquad \textit{Soluz.} \quad \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2\,t \\ z = -2 - 3\,t \end{cases}$$

Esercizio 6. *Risolvere il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + 5\,y + 6\,z = -3 \\ 7\,x + y + 2\,z = 19 \\ 9\,x + 11\,y - 10\,z = 37 \\ 13\,x - 3\,y - 2\,z = 41 \end{cases} \qquad \textit{Soluz.} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Esercizio 7. *Risolvere il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 3 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = 1 \end{cases} \qquad \textit{Soluz.} \quad \begin{cases} x_1 = -9 - t + 10\,s \\ x_2 = t \\ x_3 = -7 + 7\,s \\ x_4 = s \end{cases}$$

Esercizio 8. *Risolvere il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + 2\,y - 3\,z = 1 \\ y - 2\,z = 2 \\ 2\,y - 4\,z = 4 \end{cases} \qquad \textit{Soluz.} \quad \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 2 + 2\,t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizio 9. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ky + z = 2 \\ 2\,x - y + 3\,z = 0 \end{cases}$$

Soluz. se $k \neq 1$ si ha un'unica soluzione $\begin{cases} x = \dfrac{9\,k - 5}{k - 1} \\ y = \dfrac{1}{1 - k} \\ z = \dfrac{3 - 6\,k}{k - 1} \end{cases}$; se $k = 1$ il sistema è impossibile.

Esercizio 10. *Risolvere al variare dei parametri reali a e b il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + 2\,y + z = 3 \\ a\,y + 5\,z = 10 \\ 2\,x + 7\,y + a\,z = b \end{cases}$$

Risultati:

- se $a \neq -3 \wedge a \neq 5$ il sistema ha un'unica soluzione: $\begin{cases} x = \dfrac{3\,a^2 - ab - 20\,a + 10\,b - 35}{a^2 - 2\,a - 15} \\ y = \dfrac{5(2\,a - b + 2)}{a^2 - 2\,a - 15} \\ z = \dfrac{ab - 6\,a - 30}{a^2 - 2\,a - 15} \end{cases}$;
- se $a = -3 \wedge b \neq -4$ il sistema è impossibile;
- se $a = -3 \wedge b = -4$ il sistema è indeterminato $\left(x = \dfrac{29}{3} - 13\,t\ ;\ y = -\dfrac{10}{3} + 5\,t\ ;\ z = 3\,t\right)$;
- se $a = 5 \wedge b \neq 12$ il sistema è impossibile;
- se $a = 5 \wedge b = 12$ il sistema è indeterminato $(x = -1 + t\ ;\ y = 2 - t\ ;\ z = t)$.

Esercizio 11. *Dimostra che* $\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -14 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -19 \\ 22 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 12. *Trova una base di $W = \{p \in \mathbb{R}_3[t] : p(-2) = 3\,p(1)\}$.*
Soluz. $\beta_W = \{t^3 + 11\,t^2\ ;\ 5\,t^2 + t\ ;\ 2\,t^2 + 1\}$

Esercizio 13. *Trova una base di $U = \{p \in \mathbb{R}_4[t] : p(1) = 0\,; p(2) + 2\,p(0) = 0\,; 3\,p(-1) - p(3) = 0\}$.*
Soluz. $\beta_U = \{t^4 - 3\,t^3 + 2\,t^2\ ;\ 2\,t^3 - 9\,t^2 + t + 6\}$

Esercizio 14. *Consideriamo lo spazio $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$; dimostra che le funzioni* $\sin x$, $\cos x$ *e* $\sin x \cos x$ *sono linearmente indipendenti.*