Lancio dei dadi e probabilità

Francesco Daddi [1]

In questo articolo viene affrontato il classico problema del lancio di n dadi. Si vuole procedere per gradi, iniziando con il tradizionale metodo della tabella ed introducendo in seguito le funzioni generatrici che permettono di arrivare più agevolmente alle probabilità che vogliamo determinare. Nell'ultimo paragrafo si mostra come l'approssimazione gaussiana sia molto utile per risolvere il problema nel caso di grandi valori di n.

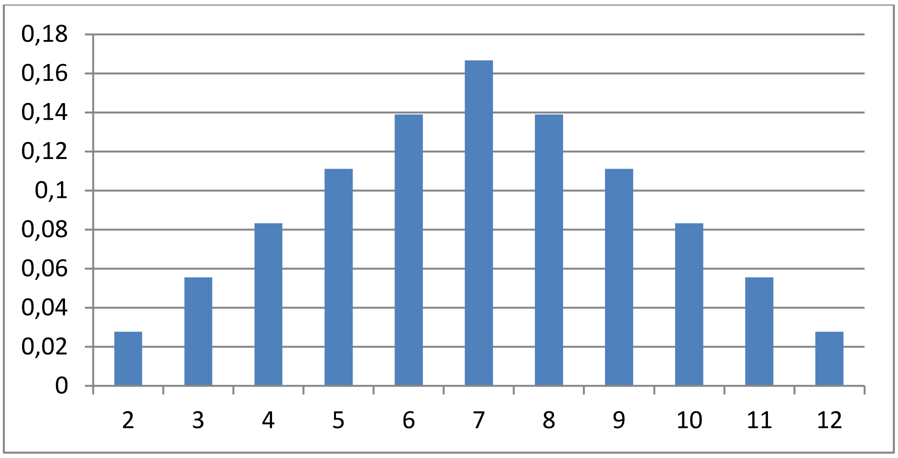
Lancio di due dadi equilibrati

Supponiamo di avere due dadi non truccati, ciascuno a 6 facce. Qual è la probabilità di ottenere 5? Oppure di ottenere 10? Possiamo rispondere semplicemente elencando in una tabella tutti i $6^2 = 36$ casi possibili:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilità di ottenere "5" è pari a $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, mentre la probabilità di ottenere "10" è uguale a $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. La variabile aleatoria X che rappresenta l'evento somma dei due risultati ha la seguente distribuzione:

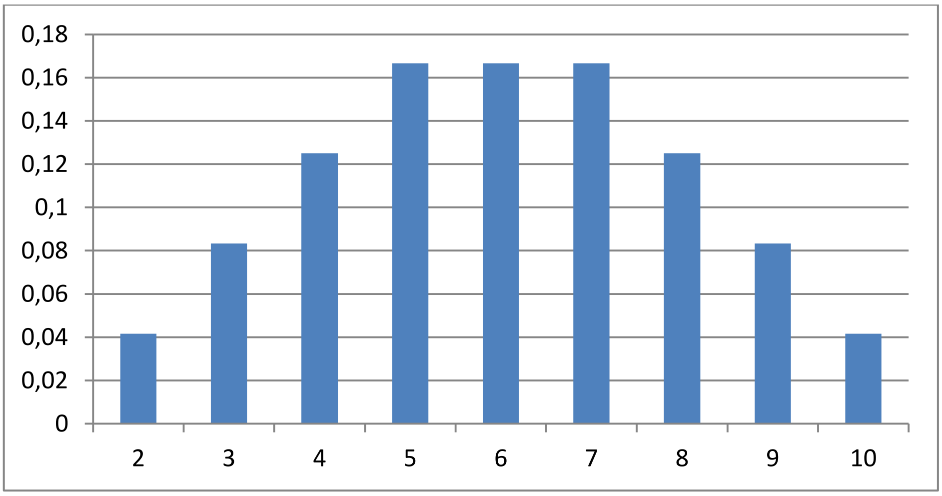
[1] *Liceo Scientifico "E. Fermi" Cecina (LI)*



Se il numero delle facce non sono uguali, il metodo da seguire è il medesimo. Nel caso in cui il numero delle facce sono 4 e 6, otteniamo la tabella seguente, nella quale sono elencati tutti i 24 casi possibili:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

La distribuzione, in questo caso, è diversa rispetto a quella vista in precedenza (si noti in ogni caso la simmetria rispetto al valore centrale, cioè rispetto a "6"): ci sono infatti tre risultati ("5", "6", "7") che hanno la stessa probabilità massima, uguale a $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.



Un metodo algebrico

Come riportato in [1] e in [2], possiamo analizzare l'ultimo esempio scrivendo i due polinomi (***funzioni generatrici***)

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

$$f_2(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{6}x^6$$

e calcolando il loro prodotto:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{6} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{12} + \frac{x^{10}}{24} \ .$$

Come si interpreta questo polinomio di decimo grado? Se ad esempio vogliamo conoscere la probabilità di ottenere 3, è sufficiente considerare il termine di terzo grado, ovvero $\frac{1}{12}x^3$: il coefficiente numerico $\frac{1}{12}$ è la probabilità cercata. Se vogliamo determinare la probabilità di fare 5, basta andare a cercare il termine di quinto grado, cioè $\frac{1}{6}x^5$; la probabilità è quindi uguale a $\frac{1}{6}$.

Cerchiamo ora di capire perché questo metodo funziona. Per ottenere 3, i casi favorevoli sono due: possiamo ottenere 1 con il primo dado e 2 con il secondo, oppure viceversa. Le relative probabilità, essendo i lanci stocasticamente indipendenti, sono $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ e $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$; la loro somma dà proprio $\frac{1}{12}$, come già visto in precedenza.

D'altra parte, quando moltiplichiamo i due polinomi, i termini di terzo grado si ottengono dalla moltiplicazione del monomio $\frac{1}{4}x$ con il monomio $\frac{1}{6}x^2$ e dalla moltiplicazione del monomio $\frac{1}{4}x^2$ con $\frac{1}{6}x$:

$$\frac{1}{4}x \cdot \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^2 \cdot \frac{1}{6}x = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24}\right)x^3 = \frac{1}{12}x^3 \ .$$

Il calcolo, dunque, è il medesimo. Si procede analogamente per gli altri termini di grado diverso da 3.

Dadi non equilibrati

Nel caso in cui uno o più dadi non siano equilibrati, possiamo seguire la stessa strada già intrapresa in precedenza.

Vediamo un semplice esempio con due dadi; il primo dado ha 4 facce e la relativa distribuzione di probabilità è

Faccia	Probab.
1	1/3
2	1/2
3	1/8
4	1/24

mentre il secondo dado ha 6 facce e distribuzione

Faccia	Probab.
1	1/4
2	1/3
3	1/5
4	1/12
5	1/30
6	1/10

Si noti che è possibile realizzare concretamente una situazione del genere senza dadi, ma semplicemente utilizzando due sacchetti: nel primo vengono messe 8 palline con il numero "1", 12 palline con il numero "2", 3 palline con il numero "3" ed infine 1 pallina con il numero "4"; nel secondo sacchetto, invece, vengono messe 15 palline con il numero "1", 20 con il numero "2", 12 con il numero "3", 5 con il numero "4", 2 con il numero "5" ed infine 6 con il numero "6". Si estrae una pallina da ciascun sacchetto e si fa la somma dei numeri ottenuti. Analizziamo la distribuzione dei punteggi con polinomi associati ai due dadi:

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{10}x^6\ ;$$

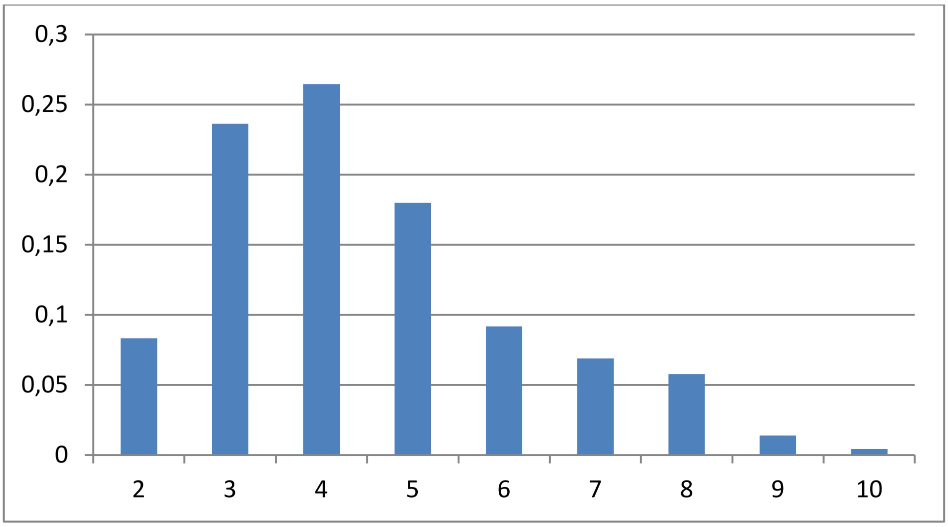
se calcoliamo il loro prodotto otteniamo

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=\frac{1}{12}x^2+\frac{17}{72}x^3+\frac{127}{480}x^4+\frac{259}{1440}x^5+$$
$$+\frac{11}{120}x^6+\frac{11}{160}x^7+\frac{83}{1440}x^8+\frac{1}{72}x^9+\frac{1}{240}x^{10}.$$

Vediamo anche in questo caso come agisce la moltiplicazione tra polinomi, analizzando come esempio la probabilità di ottenere la somma "4": può uscire "1" con il primo dado e "3" con il secondo, oppure "2" con entrambi, oppure "3" con il primo dado e "1" con l'altro. Si ha:

$$\frac{1}{3}x\cdot\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x^3\cdot\frac{1}{4}x=\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{6}+\frac{1}{32}\right)x^4=\frac{127}{480}x^4\,.$$

La distribuzione, al contrario di tutti i casi analizzati in precedenza, è asimmetrica. Il grafico evidenzia questo aspetto.



Lancio di tre dadi

Il metodo esposto al precedente paragrafo può essere esteso al lancio di tre (o più) dadi; consideriamo due dadi regolari a 4 facce e un terzo, anch'esso regolare, a 6 facce. Per i primi due abbiamo lo stesso polinomio generatore

$$f_1(x)=f_2(x)=\frac{1}{4}(x+x^2+x^3+x^4)$$

ed il loro prodotto è uguale a

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=\left(\frac{1}{4}(x+x^2+x^3+x^4)\right)^2=$$

$$=\frac{x^2+2x^3+3x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8}{16}=$$

$$=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{16}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{3}{16}x^6+\frac{1}{8}x^7+\frac{1}{16}x^8\ ;$$

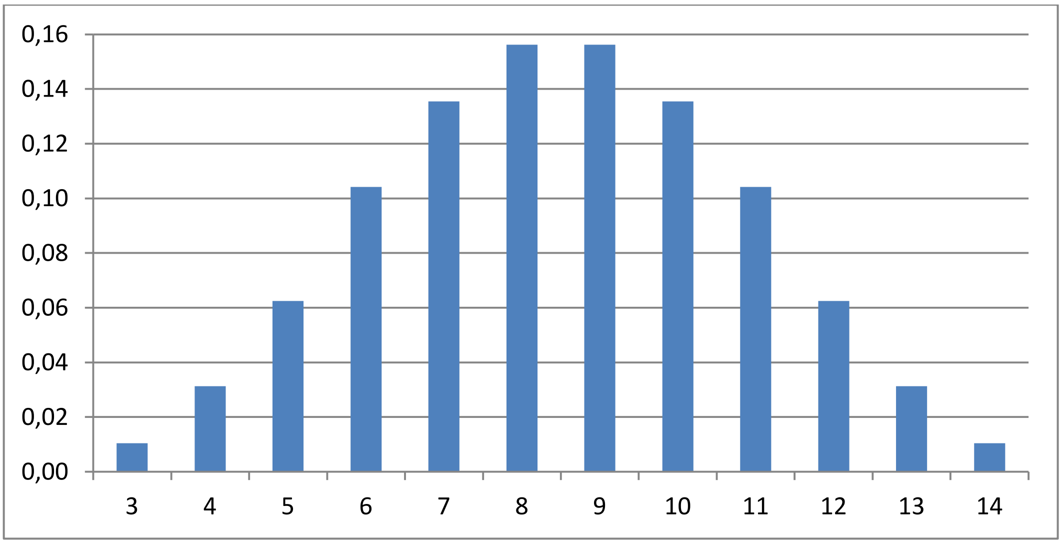
moltiplichiamo ora questo polinomio di ottavo grado con il polinomio $f_3(x)=\frac{1}{6}(x+x^2+\cdots+x^6)$ associato al terzo dado a 6 facce:

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)=$$

$$=\frac{1}{96}x^3+\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{16}x^5+\frac{5}{48}x^6+\frac{13}{96}x^7+\frac{5}{32}x^8+$$

$$+\frac{5}{32}x^9+\frac{13}{96}x^{10}+\frac{5}{48}x^{11}+\frac{1}{16}x^{12}+\frac{1}{32}x^{13}+\frac{1}{96}x^{14}$$

La distribuzione è rappresentata dal grafico seguente:



Se lanciamo tre dadi regolari, ciascuno a 10 facce (possiamo considerare il solido trapezoedro-deltoedro pentagonale), otteniamo il polinomio

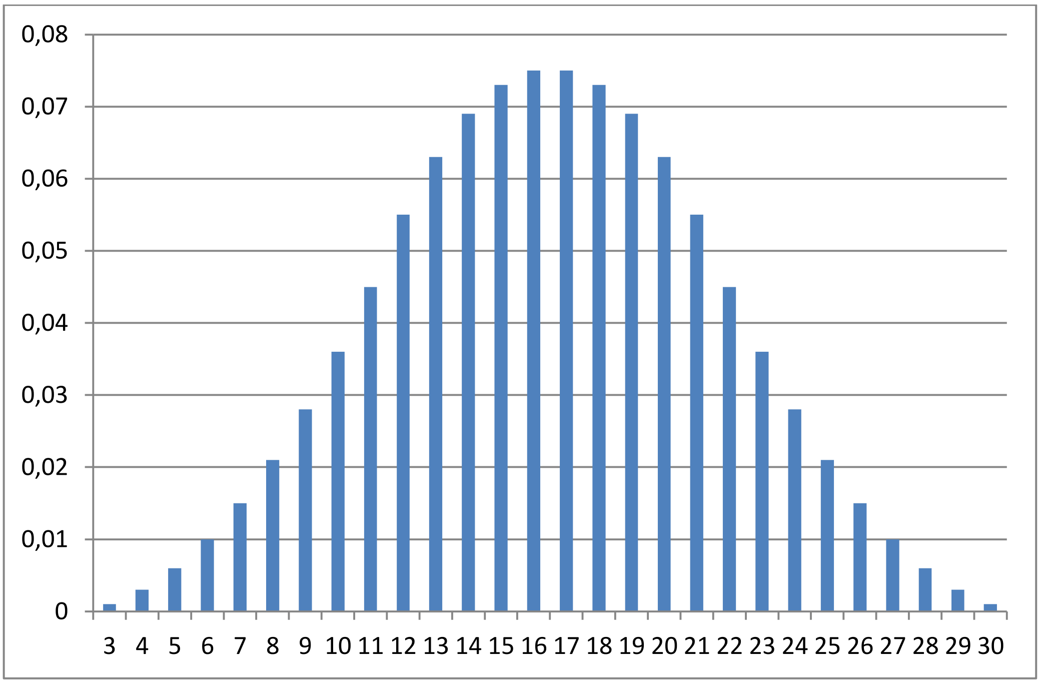
$$\left(\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}x^k\right)^3=\frac{1}{1000}\cdot\left(\sum_{k=1}^{10}x^k\right)^3=$$

$$= \frac{1}{1000}x^3 + \frac{3}{1000}x^4 + \frac{3}{500}x^5 + \frac{1}{100}x^6 + \frac{3}{200}x^7 + \frac{21}{1000}x^8 +$$

$$+ \frac{7}{250}x^9 + \frac{9}{250}x^{10} + \frac{9}{200}x^{11} + \frac{11}{200}x^{12} + \frac{63}{1000}x^{13} +$$

$$+ \frac{69}{1000}x^{14} + \frac{73}{1000}x^{15} + \frac{3}{40}x^{16} + \frac{3}{40}x^{17} + \frac{73}{1000}x^{18} + \cdots$$

dove al posto dei puntini si continua per simmetria fino all'ultimo termine $\frac{1}{1000}x^{30}$. La distribuzione è rappresentata dal seguente grafico:



Con la stessa tecnica è possibile analizzare anche il lancio di tre dadi cubici; si tratta di un problema "classico", visto che ad occuparsene in prima persona fu addirittura Galileo. Si tratta di calcolare $\left(\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} x^k\right)^3$, ricavando

$$\frac{x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + \cdots}{216}.$$

dove al numeratore si continua per simmetria, concludendo con $3x^{17} + x^{18}$.

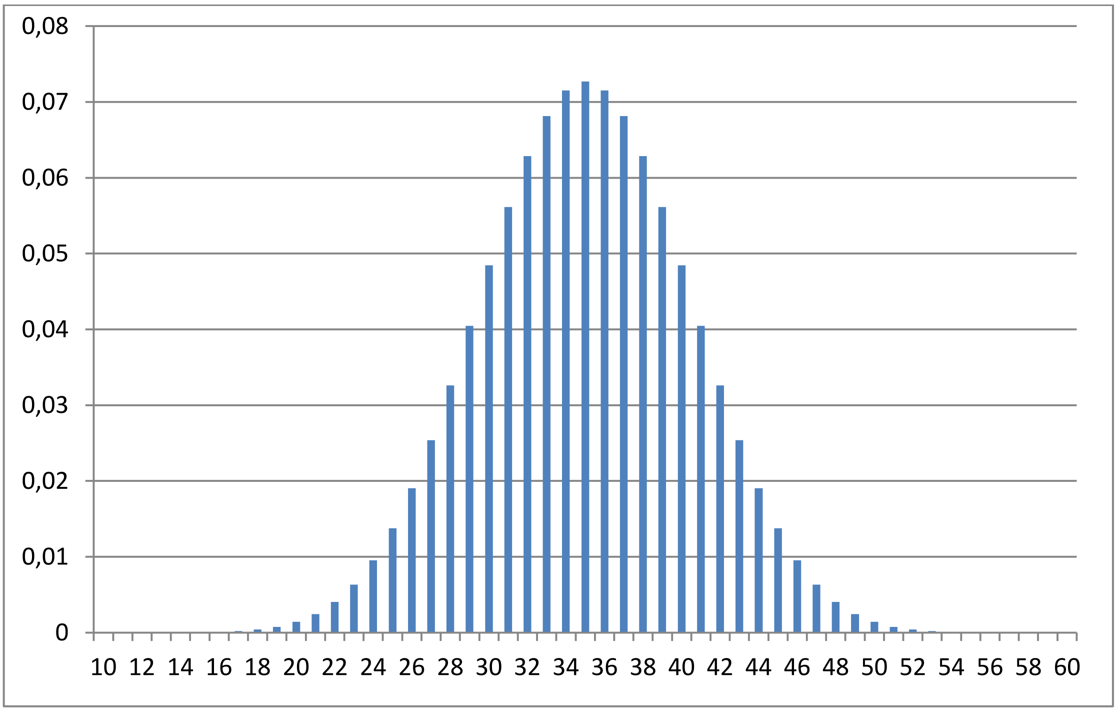
I risultati con le maggiori probabilità di uscire sono "10" e "11", entrambi con $p = \frac{27}{216}$, come notò il celebre scienziato pisano.

Lancio di “tanti” dadi

Se lanciamo n dadi equilibrati a f facce, è sufficiente calcolare i coefficienti del polinomio

$$\left(\frac{1}{f}\sum_{k=1}^{f} x^k\right)^n .$$

Aiutandosi con un software matematico, possiamo calcolare la distribuzione nel caso in cui $n = 10,\ f = 6$. La distribuzione richiama palesemente la distribuzione normale:



Il risultato con la maggiore probabilità di uscita è “35”, con probabilità $\frac{7631}{104976} \approx 0{,}0727\ \ (7{,}27\ \%)$.

Quando i dadi (supposti nel seguito tutti con 6 facce) in gioco iniziano ad essere numerosi, al posto del procedimento esatto già visto in dettaglio con i polinomi (che è chiaramente tanto più dispendioso quanto più è grande n), è possibile ricorrere all’approssimazione gaussiana; ad esempio, per determinare la probabilità che la somma delle facce sia uguale a y, basta calcolare l’integrale

$$\int_{y-0,5}^{y+0,5} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

dove $\mu = \frac{7}{2}n$, $\sigma^2 = \frac{35}{12}n$. Si noti che l'approssimazione migliora dal crescere di n. Si veda anche [3], pag. 162.

Ad esempio, lanciando $n = 20$ dadi, la probabilità di ottenere "57" è uguale a

$$\int_{56,5}^{57,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{35}{12} \cdot 20}} \exp\left(-\frac{(x-3,5\cdot 20)^2}{2\cdot\frac{35}{12}\cdot 20}\right) dx =$$

$$= \int_{56,5}^{57,5} \sqrt{\frac{3}{350\,\pi}} \exp\left(-\frac{3}{350}(x-70)^2\right) dx \approx 0{,}01229\,.$$

Per avere un'idea della "bontà" dell'approssimazione, confrontiamo il risultato ottenuto con quello teorico. Invece di sviluppare il polinomio $\left(\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} x^k\right)^{20}$, possiamo ricorrere alla sua derivata 57-esima (si veda [1] a pag. 58 oppure [2] a pag 482):

$$\frac{1}{57!} \cdot \frac{d^{57}}{dx^{57}} \left(\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} x^k\right)^{20} \Bigg|_{x=0} = \frac{45594319698440}{6^{20}} \approx 0{,}01247\,.$$

L'errore relativo commesso è $\approx 1{,}5\ \%$.

Ulteriore esempio: con $n = 50$ dadi, la probabilità esatta di ottenere la somma "150" è $\approx 0{,}003894$, mentre il valore approssimato utilizzando la gaussiana è $\approx 0{,}003879$. L'errore in questo esempio è $\approx 0{,}4\ \%$.

L'approssimazione gaussiana è comoda in particolar modo quando si vuole stimare la probabilità di ottenere una somma compresa in un dato intervallo. Se lanciamo $n = 80$ dadi, la probabilità che la somma sia compresa tra "260" e "270" (estremi inclusi) è approssimata da

$$\int_{259,5}^{270,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{35}{12} \cdot 80}} \exp\left(-\frac{(x-3,5\cdot 80)^2}{2\cdot \frac{35}{12}\cdot 80}\right) dx \approx 0,1772$$

molto vicino al valore teorico, pari a $\approx 0,1774$. L'errore relativo commesso è $\approx 0,1\ \%$.

Bibliografia

[1] Baldi P., *Calcolo delle probabilità e statistica,* McGraw-Hill, 1998.

[2] Impedovo M., *Somma di numeri aleatori*, Progetto Alice, n. 36, 2011.

[3] Verri M., *Probabilità e Statistica, 600 esercizi d'esame risolti*, Esculapio, 3 ediz. 2017.