QUANTO È DIFFICILE FARE 6 AL SUPERENALOTTO?

di Francesco Daddi

La probabilità è un perno fondamentale per la comprensione delle teorie fisiche, biologiche e sociali; ogni attività umana è soggetta a qualche incertezza, e per tale motivo è importante riuscire a prevedere, nel modo più preciso possibile, come si evolveranno i fatti.

Proprio per queste motivazioni, nella scuola secondaria il calcolo delle probabilità dovrebbe rivestire un ruolo centrale e di primo piano; quello a cui si assiste, però, va nella direzione contraria, in quanto il suo insegnamento viene spesso sottostimato e trascurato.

Le stesse Indicazioni Nazionali, nella sezione «Dati e previsioni», evidenziano l'esigenza di apprendere «*[...] la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica. [...] Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson)*». Viene inoltre sottolineata l'opportunità di sviluppare l'argomento in un contesto interdisciplinare «*[...] In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi*».

Tale approccio interdisciplinare mira all'acquisizione di competenze di cittadinanza attiva e consapevole.

All'interno della stessa matematica, il calcolo delle probabilità è purtroppo una delle parti più ostiche da insegnare e da apprendere: le sue idee, i suoi modelli, l'interpretazione dei risultati ottenuti sono costantemente esposti al rischio di malintesi e, spesso, l'intuizione porta inesorabilmente a ragionamenti totalmente errati.

Non è inoltre da sottovalutare il fatto che i corsi universitari della statistica e della probabilità per la formazione degli insegnanti non sono molto diffusi sul territorio nazionale e che ci sono molti insegnanti che, nel loro percorso di studi, non hanno sostenuto esami al riguardo.

Per aiutare il lettore a riflettere sulle sue molteplici applicazioni, il presente articolo fornisce degli esempi connessi al problema «*Quanto è difficile vincere al Superenalotto, azzeccando 6 numeri su 90?*». Seguendo le regole del calcolo combinatorio e osservando che l'ordine non conta, le possibili estrazioni sono $\binom{90}{6}$ mentre c'è un solo caso favorevole; la probabilità di conseguenza è

$$p = \frac{1}{\binom{90}{6}} = \frac{1}{622614630} \approx 1{,}606 \cdot 10^{-9}\,.$$

Possiamo ragionare, in alternativa, nel modo seguente: la probabilità che il primo numero estratto sia tra i 6 che abbiamo giocato è pari a $\frac{6}{90}$, la probabilità che il secondo estratto sia tra i 5 rimasti è $\frac{5}{89}$ (nell'urna sono rimaste 89 palline), e così via fino a $\frac{1}{85}$. Moltiplicando queste probabilità si ritrova la frazione

$$p = \frac{6}{90} \cdot \frac{5}{89} \cdot \frac{4}{88} \cdot \frac{3}{87} \cdot \frac{2}{86} \cdot \frac{1}{85} = \frac{1}{622614630}.$$

Detto così non rende molto l'idea, giusto? Per cercare di contrastare la mancanza di abitudine nel trattare numeri così grandi (e probabilità molto piccole…), di seguito viene stilato un elenco di eventi che hanno una probabilità simile e/o confrontabile con quella relativa al Superenalotto (indicato nel seguito con S.E.).

1) Consideriamo una pila alta 1450 km, formata da monete da 1 euro (spessore 2,33 mm): qual è la probabilità di indovinare la moneta vincente? Poiché la «torre» è formata da circa 622 milioni di monete, la probabilità collima sostanzialmente con il S.E.
2) Prendete quindici stanze 5 m x 5 m x 3 m e riempitele con mazzi di carte toscane da 40. La probabilità di trovare la carta vincente si ottiene calcolando il rapporto tra il volume di una singola carta e il volume totale delle stanze: si scopre che ha lo stesso ordine di grandezza del S.E.
3) Consideriamo un bersaglio di diametro 100 metri e il suo centro di diametro 4 millimetri. La probabilità di fare centro è dato dal rapporto delle aree dei due cerchi:

$$p = \frac{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-3} m)^2}{\pi \cdot (50 m)^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

4) Selezioniamo un punto sulla Terra (supposta sferica e di raggio $R_T = 6370$ km). Qual è la probabilità che il punto si trovi all'interno della Città del Vaticano (0,44 km^2)? Dal rapporto delle aree

$$p = \frac{0{,}44\, km^2}{4\pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^3 km)^2} \approx 8{,}6 \cdot 10^{-10}$$

si scopre che è più difficile (anche se di poco) rispetto alla vincita al S.E. Un altro esempio analogo: se lasciamo cadere una pallina dall'alto nel comune di Cecina (42,5 km^2), la probabilità che cada nel vaso da fiori di lato 26 cm, collocato sul mio terrazzo, è la stessa rispetto a fare «6» al S.E.
5) Suddividiamo casualmente in gruppi di 13 persone ciascuno l'intera popolazione mondiale (7,7 miliardi di persone). Qual è la probabilità che Alice e Bob finiscano nello stesso gruppo?

Alice finirà in uno dei $\frac{7{,}7\cdot 10^9}{13}$ gruppi; nel suo gruppo ci sono 12 posti disponibili (uno lo ricopre lei), mentre Bob può essere assegnato in uno qualsiasi dei restanti posti ancora da attribuire. Si trova

$$p=\frac{12}{7{,}7\cdot 10^9-1}\approx\frac{12}{7{,}7\cdot 10^9}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

6) Esco di casa e chiedo alle prime tre persone che incontro la data in cui compiono gli anni (non consideriamo per semplicità i bisestili): qual è la probabilità che tutte e tre condividano con me il compleanno? La probabilità che la prima persona condivida con me il compleanno è $\frac{1}{365}$; la seconda e la terza persona hanno la stessa probabilità (si tratta infatti di variabili aleatorie indipendenti); moltiplicando le singole probabilità si ricava

$$p=\frac{1}{365}\cdot\frac{1}{365}\cdot\frac{1}{365}=\left(\frac{1}{365}\right)^3\approx 2\cdot 10^{-8}$$

ossia circa 13 volte più probabile rispetto al S.E.!

7) Incontrate, una dopo l'altra, 7381 persone: qual è la probabilità che nessuna di esse festeggi gli anni nel vostro giorno? La prima persona ha probabilità $1-\frac{1}{365}=\frac{364}{365}$ di festeggiare il compleanno in una data diversa dalla vostra; lo stesso discorso vale per tutte le altre (si tratta anche qui di variabili aleatorie indipendenti) e quindi:

$$p=\left(\frac{364}{365}\right)^{7381}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

8) Incontrate 73 persone, a cui chiedete la data in cui compiono gli anni. Qual è la probabilità di trovarne *almeno* 7 che hanno lo stesso vostro compleanno? Basta ragionare sull'evento contrario (al massimo 6 persone con il vostro compleanno) ed applicare lo schema binomiale:

$$p=1-\sum_{k=0}^{6}\binom{73}{k}\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^k\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{73-k}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

9) Prese a caso 115 persone, qual è la probabilità che compiano gli anni in giorni distinti?
Considerata all'inizio una persona qualsiasi, per non avere lo stesso compleanno la seconda ha 364 possibilità su 365 (dobbiamo escludere il giorno in cui è nata la prima), la terza ne ha 363 su 365 (si devono escludere i due giorni in cui sono nate le prime due persone), e così via:

$$p = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{251}{365} \approx 1{,}68 \cdot 10^{-9}.$$

L'esempio si ritrova, sotto un'altra forma, in altri contesti. Ad esempio, prendiamo 235 orologi digitali regolati a caso ($24 \cdot 60 = 1440$ possibili orari): qual è la probabilità che in un preciso istante le ore segnate siano tutte diverse? Possiamo immaginare di avere un «anno» formato da 1440 «giorni» e ragionare come prima:

$$p = \frac{1439}{1440} \cdot \frac{1438}{1440} \cdot \ldots \cdot \frac{1206}{1440} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

10) Ad una gara podistica partecipano 855 concorrenti. Qual è la probabilità di azzeccare il podio finale (primi 3 posti)? C'è un solo caso favorevole, mentre esistono 855 possibilità per il vincitore, 854 per il secondo posto e infine 853 per il gradino più basso del podio:

$$p = \frac{1}{855 \cdot 854 \cdot 853} = \frac{1}{622835010} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

11) La probabilità di indovinare l'arrivo completo di una corsa con 12 partecipanti (di cui non conosciamo niente) è $p = \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{12!} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-9}$, superiore al S.E. Indovinare però l'arrivo completo della maratona di New York (52000 arrivi al traguardo) è decisamente più «impegnativo»: significa vincere per 25318 volte di seguito al S.E. e, considerando che ci sono 3 estrazioni settimanali, corrisponde a fare «6» ad ognuna di esse per 162 anni!

12) Una scimmia batte a caso i 105 tasti di un portatile. Supponendo che ogni tasto abbia ogni volta la stessa probabilità di essere premuto, qual è la probabilità che riesca a scrivere la parola «*baffo*»? Chiaramente ogni volta la scimmia deve schiacciare il tasto giusto, e ciò accade con probabilità $\frac{1}{105}$; ogni scelta è indipendente dalle precedenti, quindi risulta:

$$p = \left(\frac{1}{105}\right)^5 = \frac{1}{12762815625} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-11}$$

ossia 20 volte più difficile rispetto alla vincita al S.E., ma sempre più facile rispetto alla vincita all'opzione «*Superstar*» ($p = 1{,}8 \cdot 10^{-11}$). Sperare che una scimmia componga poi l'intera *Divina Commedia* (circa 510000 caratteri, spazi inclusi) equivale a vincere per oltre 117mila volte di seguito al S.E. (circa 750 anni).

13) Al ristorante «*Il matematico folle*» un cameriere riceve un ordine da una coppia di sposi, ma per un disguido alla cucina non arriva il biglietto recante l'ordine. Sapendo che il menu prevede 8 tipi di antipasto, 19 primi, 18 secondi e 9 con-

torni, qual è la probabilità che, preparando due ordini a caso, la cucina riesca ad indovinare esattamente la cena degli sposi? Le scelte dei due sposi sono indipendenti e la probabilità è perciò pari a:

$$p=\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{9}\right)^2\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

14) Si considerino 35288 calzini (ossia 17644 paia) ben mescolati, ognuno con il proprio nome e appartenenti a 17644 persone. Qual è la probabilità, estraendo due calzini a caso, di estrarre proprio i miei? Notando che c'è un solo caso favorevole e che le possibili estrazioni sono $\binom{35288}{2}$, si ottiene

$$p=\frac{1}{\binom{35288}{2}}=\frac{1}{622603828}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

15) Qual è la probabilità di azzeccare una targa italiana di un'automobile?
Le targhe che si possono formare con il sistema attuale (quattro lettere e tre numeri) sono $26^4\cdot 10^3=456976000$ quindi la probabilità richiesta è (di poco) maggiore del S.E.:

$$p=\frac{1}{456976000}\approx 2{,}2\cdot 10^{-9}.$$

16) Qual è la probabilità che, sulla ruota di Napoli, il numero 90 esca sempre nelle prossime 7 estrazioni? I numeri estratti sono 5, quindi ogni volta il 90 esce con probabilità $\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$; ciò deve accadere per 7 volte e quindi si ricava:

$$p=\left(\frac{1}{18}\right)^7=\frac{1}{612220032}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

17) Qual è la probabilità che, sulla ruota di Napoli, il numero 90 esca per la prima volta alla 305-esima estrazione? Nelle prime 304 estrazioni devono uscire numeri diversi da 90 (e ciò si verifica con probabilità $1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$), mentre alla 305-esima deve uscire il 90; per l'indipendenza delle estrazioni si ha

$$p=\left(\frac{17}{18}\right)^{304}\cdot\frac{1}{18}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

18) Pierino sta rispondendo a caso ad un test, composto da 20 domande a risposta multipla (1 risposta giusta su 4 disponibili). Qual è la probabilità che ne indovini almeno 18? Con la legge binomiale si ottiene

$$p=\sum_{k=18}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

Se le domande sono invece 100, la probabilità di arrivare almeno a 60, ovvero alla sufficienza, è $p \approx 1{,}3 \cdot 10^{-13}$, decisamente più bassa persino rispetto all'opzione *Superstar*.

19) Un ristorante ha 126 tavoli. Sapendo che ciascun cliente che ha prenotato può disdire con una probabilità del 20%, il gestore del ristorante accetta fino a 130 prenotazioni. Qual è la probabilità che almeno un cliente resti senza il posto (*overbooking*)? Utilizzando lo schema binomiale, si tratta di calcolare la probabilità che ci siano almeno 127 clienti che si recano al ristorante:

$$p = \sum_{k=127}^{130} \binom{130}{k} \cdot (0{,}8)^k \cdot (0{,}2)^{130-k} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

20) Un partito politico italiano ha il 3,1% dei consensi su scala nazionale. Per un sondaggio, si intervistano 100 persone. Qual è la probabilità che il sondaggio dia il partito al 18%? Dato che il campione scelto è molto piccolo rispetto al numero n degli aventi diritto al voto ($n \gg 100$), possiamo passare dallo schema ipergeometrico a quello delle prove ripetute:

$$p = \frac{\binom{0{,}031 \cdot n}{18} \cdot \binom{0{,}969 \cdot n}{100-18}}{\binom{n}{100}} \approx \binom{100}{18} \cdot 0{,}031^{18} \cdot 0{,}969^{100-18} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

21) Lanciate 29 volte una moneta equilibrata. La probabilità di ottenere sempre testa è

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{29} \approx 1{,}86 \cdot 10^{-9}.$$

22) Lanciamo 100 volte una moneta equilibrata: qual è la probabilità di ottenere esattamente 21 volte testa? Con la distribuzione binomiale si ha:

$$p = \binom{100}{21} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{79} = \binom{100}{21} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

23) Lanciando una moneta truccata (testa esce con prob. 0,25), la probabilità di ottenere 17 teste consecutive prima di ottenere 8 croci consecutive è (si veda [5], pag. 138 e [10], pag. 107):

$$p = \frac{0{,}25^{17-1} \cdot (1 - 0{,}75^8)}{0{,}25^{17-1} + 0{,}75^{8-1} - 0{,}25^{17-1} \cdot 0{,}75^{8-1}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

24) Si lanciano contemporaneamente 1766 monete non truccate. Quelle che hanno dato Testa vengono tolte dalla tavola e si lanciano di nuovo le monete «super-

stiti», ripetendo la procedura: vengono tolte quelle che hanno dato Testa, e così via. Ad un certo punto non restano più monete sul tavolo. Qual è la probabilità che siano necessarie *esattamente* 40 sessioni di lanci? Per i dettagli si veda [3].

$$p=\left(1-\frac{1}{2^{40}}\right)^{1766}-\left(1-\frac{1}{2^{39}}\right)^{1766}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

Si consideri il fatto che, in media, occorrono $\approx$ 12,1 sessioni di lanci per concludere il gioco.

25) Lanciate 11 volte un dado a 6 facce. La probabilità di ottenere sempre «6» è

$$p=\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\approx 2{,}8\cdot 10^{-9}$$

cioè quasi il doppio rispetto al S.E.

26) Lanciando 111 volte un dado a 6 facce, la probabilità di *non* ottenere mai «6» è

$$p=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{111}=\left(\frac{5}{6}\right)^{111}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

Lanciando una coppia di dadi, la probabilità di non ottenere mai «12» in 719 lanci è uguale a $p=\left(1-\frac{1}{6^2}\right)^{719}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}$. Lanciando tre dadi, la probabilità di non ottenere mai «18» in 4363 lanci è $p=\left(1-\frac{1}{6^3}\right)^{4363}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}$.

27) Lanciando una coppia di dadi non truccati a 6 facce per 26943 volte, qual è la probabilità che *non* vi sia una serie di due «12» consecutivi?
Si tratta (si veda [4]) di calcolare Q_{26943}, sapendo che $Q_0 = Q_1 = 1$, $Q_n = (1-p)\cdot Q_{n-1} + p\,(1-p)\cdot Q_{n-2}$, con $p=\frac{1}{36}$. Si trova $Q_{26943}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}$.
Stesso risultato se calcoliamo la probabilità di non ottenere una serie di due «6» consecutivi con 823 lanci di un singolo dado, oppure se ci chiediamo quale sia la probabilità che non vi siano due teste consecutive in 96 lanci di una moneta.

28) Si stima che i centenari sulla Terra siano circa mezzo milione. Se estraiamo a caso due persone nel mondo, la probabilità che siano entrambe centenarie è maggiore rispetto al S.E.:

$$p=\frac{\binom{5\cdot 10^5}{2}}{\binom{7{,}7\cdot 10^9}{2}}\approx\left(\frac{5\cdot 10^5}{7{,}7\cdot 10^9}\right)^2\approx 4{,}2\cdot 10^{-9}.$$

Se nel mondo invece vengono estratte 4 persone, la probabilità che siano tutte italiane è $\approx 4\cdot 10^{-9}$; se tiriamo a sorte 12 persone, la probabilità che siano tutte cinesi è $\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}$.

29) Ci sono 5 miliardi di pneumatici, di cui solamente 4 sono tuoi. Qual è la probabilità che, scegliendone un paio a caso, ce ne sia almeno uno dei tuoi? Si ragiona sull'evento contrario (i 2 scelti cioè devono far parte dei $(5 \cdot 10^9 - 4)$ che non ti appartengono):

$$p = 1 - \frac{\binom{5 \cdot 10^9 - 4}{2}}{\binom{5 \cdot 10^9}{2}} \approx 1 - \left(\frac{5 \cdot 10^9 - 4}{5 \cdot 10^9}\right)^2 \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

30) In un'urna ci sono 118 palline numerate da 1 a 118. Se ne sorteggiano 7 in blocco. Qual è la probabilità che *il maggiore* tra quelli estratti sia 10?
Visto che il numero più alto è 10, le restanti 6 palline devono essere estratte tra le prime 9: i casi favorevoli sono quindi $\binom{9}{6}$ e quelli possibili $\binom{118}{7}$, per cui risulta

$$p = \frac{\binom{9}{6}}{\binom{118}{7}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

31) Estraendo in blocco 18 carte da un mazzo di 40, qual è la probabilità che siano tutte rosse (a cuori o quadri)? Le possibili estrazioni sono $\binom{40}{18}$; poiché le 18 carte estratte devono far parte delle 20 rosse, i casi favorevoli sono $\binom{20}{18}$:

$$p = \frac{\binom{20}{18}}{\binom{40}{18}} = \frac{1}{596738220} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-9}.$$

In alternativa, possiamo ragionare così: la probabilità che la prima carta estratta sia rossa è $\frac{20}{40}$, la probabilità che la seconda carta sia rossa è $\frac{19}{39}$, che lo sia anche la terza è $\frac{18}{38}$, e così via:

$$p = \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} \cdot \frac{18}{38} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{23} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-9}.$$

32) Qual è la probabilità che, nelle prossime 62 partite di briscola, non ti capiti mai neanche un asso alla prima mano? All'inizio di ogni partita, le tre carte

che hai in mano devono appartenere all'insieme delle 36 carte che non sono assi e dunque:

$$\left(\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}\right)^{62}\approx 1{,}8\cdot 10^{-9}\quad \text{oppure}\quad \left(\frac{\binom{36}{3}}{\binom{40}{3}}\right)^{62}\approx 1{,}8\cdot 10^{-9}.$$

33) Giocando a poker, qual è la probabilità di ottenere un *full* (un tris e una coppia) servito per 3 partite consecutive? I giocatori esperti sanno perfettamente quanto ciò non sia facile (si veda [2], pag. 126): ci sono $13\cdot\binom{4}{3}$ possibili tris e, di conseguenza, $12\cdot\binom{4}{2}$ coppie:

$$p=\left(\frac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot 12\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}\right)^{3}=\left(\frac{6}{4165}\right)^{3}\approx 3\cdot 10^{-9}.$$

34) Giocando con una sola cartella da 15 numeri, qual è la probabilità di fare *tombola esattamente* alla 30-esima estrazione? Osserviamo che, nelle prime 29 estrazioni, devono uscire 14 numeri della mia cartella, mentre alla 30-esima estrazione deve uscire il numero mancante tra i restanti 61:

$$p=\frac{\binom{15}{14}\cdot\binom{75}{15}}{\binom{90}{29}}\cdot\frac{1}{61}\approx 1{,}7\cdot 10^{-9}.$$

Si tenga conto, per riflettere sulla difficoltà dell'evento, che il valor medio del numero delle estrazioni necessarie è pari a circa 85,3.

35) Pierino sta collocando su un ripiano della libreria in modo del tutto casuale 21 libri, di cui 8 di matematica, 5 di fisica, 3 di chimica, 2 di biologia, 2 di geologia e 1 di geografia. Qual è la probabilità che i libri dello stesso argomento si trovino uno accanto all'altro?
I modi possibili per inserire i libri sono 21!, mentre i casi favorevoli sono, fissando l'ordine delle materie (in 6! modi), 8! · 5! · 3! · 2! · 2! · 1!; risulta:

$$p=\frac{6!\cdot(8!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!)}{21!}=\frac{1}{611080470}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

36) In pizzeria si presentano 84 amici per mangiare una pizza ciascuno; il menu prevede 7 diversi tipi di pizza. Qual è la probabilità di azzeccare la richiesta

totale giusta? (Ad esempio: 3 margherite, 2 ai formaggi, 1 ai funghi, 1 al prosciutto). Si noti che al pizzaiolo non interessa chi sono le persone che hanno scelto un particolare tipo di pizza, *ma solo il numero di pizze da fare*! Sfruttando le *combinazioni con ripetizione* (si veda [1], pag. 201), la probabilità coincide esattamente con il S.E.:

$$\frac{1}{\binom{84+7-1}{84}} = \frac{1}{\binom{90}{84}} = \frac{1}{\binom{90}{6}}.$$

37) In un'urna ci sono 58 palline rosse e 34 palline bianche. Vengono estratte tutte una dopo l'altra, senza reimmissione. Qual è la probabilità che non si presentino mai due bianche di seguito? Si tratta di inserire le 34 bianche tra i 57 posti disponibili tra le rosse, tenendo conto inoltre del posto iniziale e di quello finale (si veda [9], pag. 14):

$$p = \frac{58!\cdot 34!\cdot\binom{59}{34}}{(58+34)!} \approx 1{,}7\cdot 10^{-9}.$$

38) Tra 788 studenti, 1576 genitori e 80 professori, si scelgono a caso 16 persone, senza far distinzione tra i ruoli. Qual è la probabilità di selezionare 4 studenti, 4 genitori e 8 professori?

$$\frac{\binom{788}{4}\cdot\binom{1576}{4}\cdot\binom{80}{8}}{\binom{788+1576+80}{16}} \approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

39) In un'azienda lavorano 22 dipendenti che devono essere distribuiti su tre turni di ferie: il primo turno prevede 5 persone a riposo, il secondo ne prevede 9 e il terzo i restanti 8. Qual è la probabilità di indovinare tutti i nominativi dei tre gruppi? L'ordine all'interno dei turni non conta: per il primo turno ci sono $\binom{22}{5}$ possibili gruppi di persone, per il secondo turno ce ne sono $\binom{22-5}{9}$, mentre per il terzo gruppo si ha $\binom{22-5-9}{8} = \binom{8}{8} = 1$, cioè un solo gruppo. Essendoci un solo caso favorevole, risulta:

$$p = \frac{1}{\binom{22}{5}\cdot\binom{17}{9}} \approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

40) 6000 persone si recano, in modo totalmente casuale, a 4 autolavaggi. Qual è la probabilità che *esattamente* 1598 si rechino all'autolavaggio A, 1398 al B, 1530 al C, 1474 al D? I casi possibili sono 4^{6000}, mentre quelli favorevoli sono $\binom{6000}{1598}\cdot\binom{6000-1598}{1398}\cdot\binom{6000-1598-1398}{1530}$; la probabilità pertanto è pari a

$$p=\frac{\binom{6000}{1598}\cdot\binom{4402}{1398}\cdot\binom{3004}{1530}}{4^{6000}}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

41) Una segretaria deve inserire 15 lettere nelle rispettive buste, ma lo fa a caso. La probabilità che, per 7 volte consecutive, commetta esattamente 12 errori è doppia rispetto al S.E. (si veda [5], pag. 157):

$$p=\left[\frac{1}{(15-12)!}\cdot\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots-\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}\right)\right]^7\approx 3{,}3\cdot 10^{-9}.$$

42) Supponiamo che un partito A e un partito B si siano sfidati ad un ballottaggio. Il partito A ha ricevuto 311300001 voti, *uno* in più del partito B. Qual è la probabilità che, durante lo spoglio, effettuato una scheda per volta, il partito A sia sempre stato davanti al partito B? Dal *Teorema del ballottaggio* (si veda [8], pag. 155) sappiamo che

$$p=\frac{\nu_A-\nu_B}{\nu_A+\nu_B}=\frac{311300001-311300000}{311300001+311300000}=\frac{1}{622600001}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

43) Giulio sta giocando contro Ugo. Giulio ha 30 monete, mentre Ugo ne ha 18. Ad ogni lancio di una moneta truccata che dà testa con probabilità pari a 24,5%, se esce testa Giulio guadagna una moneta di Ugo, altrimenti viceversa. Vince chi riesce ad ottenere tutte e 48 le monete.
La probabilità che Giulio riesca a vincere, nonostante all'inizio abbia la maggioranza delle monete, è molto bassa (si veda [10], pag. 98):

$$p=\frac{1-\left(\frac{1-0{,}245}{0{,}245}\right)^{30}}{1-\left(\frac{1-0{,}245}{0{,}245}\right)^{48}}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

44) Consideriamo un *album* da 5 figurine. Comprando una figurina alla volta, in media servono $5\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\approx 11{,}4$ acquisti per finirlo, ma la probabilità che ciò si verifichi *con più di* 98 acquisti è (si veda [5], pag. 164)

$$p=\sum_{k=1}^{5-1}(-1)^{k+1}\cdot\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{5-k}{5}\right)^{98}\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}.$$

Si perviene allo stesso risultato se calcoliamo la probabilità di finire un album da 100 figurine comprandone più di 2473 (in media stavolta ne servono ≈ 518,7).

45) A seguire le lezioni di un corso universitario sono presenti, ogni volta, gli stessi 45 studenti; al fine di fare degli esercizi alla lavagna, ad ogni lezione viene estratto a sorte uno di loro (ad uno studente può toccare più volte). Qual è la probabilità che, dopo le 60 lezioni del corso, ciascun studente sia stato chiamato alla lavagna almeno una volta?
Sebbene il contesto sia nettamente diverso, si tratta del problema dell'album in cui stavolta le figurine sono rappresentate dagli studenti (per dirla con Poincaré: «*La matematica è l'arte di dare lo stesso nome ad oggetti diversi*»). Si ha

$$p = 1 - \sum_{k=1}^{45-1} (-1)^{k+1} \cdot \binom{45}{k} \cdot \left(\frac{45-k}{45}\right)^{60} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

46) *Problema dell'ago di Buffon.* Un ago di lunghezza $L = 1{,}00$ cm viene lasciato cadere su un pavimento sul quale sono tracciate delle linee parallele, a distanza h = 2,46 cm una dall'altra; qual è la probabilità che in ciascuno dei prossimi 15 lanci l'ago intersechi una qualsiasi delle linee? (Si veda [7], pag. 83):

$$p = \left(\frac{2 \cdot L}{\pi \cdot h}\right)^{15} = \left(\frac{2 \cdot 1{,}00\,cm}{\pi \cdot 2{,}46\,cm}\right)^{15} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

47) In quanti modi si possono salire 43 scalini salendone 1 oppure 2 per volta? Il 44-esimo numero di Fibonacci ($F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) risponde a questa domanda (si veda [6], pag. 152); la probabilità di indovinare è:

$$p = \frac{1}{F_{44}} = \frac{1}{701408733} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-9}.$$

Francesco Daddi
Liceo Scientifico «Fermi», Cecina
francesco.daddi@libero.it

Bibliografia

[1] F. Bellissima – F. Montagna, *Matematica per l'informatica,* Carocci, 2006.
[2] F. Benuzzi, *La legge del perdente*, Dedalo, 2018.
[3] F. Daddi, *Un interessante problema di probabilità,* in *Euclide. Giornale di matematica per i giovani* – ISSN 2282-1287, numero 50, 2019.
[4] F. Daddi, *I primi due successi consecutivi*, in *MatematicaMente* – ISSN 2037-6367, numeri 253-254, 2019.
[5] G. Letta, *Probabilità elementare*, Zanichelli, 1993.
[6] M. Livio, *La sezione aurea, Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni,* Rizzoli, 2003.
[7] E. Giusti, *La matematica in cucina*, Boringhieri, 2004.
[8] P.J. Nahin, *Sarai ancora vivo tra 10 anni?*, Hoepli, 2015.
[9] E. Regazzini, http://www-dimat.unipv.it/~bassetti/didattica/probI/probabilita_2017-18.pdf, 2018.
[10] S. Ross, *Calcolo delle probabilità*, Apogeo – Maggioli, 2016.