# Esercizi sui limiti 13/12/2020 - Francesco Daddi

**Esercizio 1.** Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\cos^2 x - 2\,x\,\cos x + x}{3\,\sin^3 x}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,(\cos^2 x - 2\,\cos x + 1)}{3\,\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3}\cdot\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^3 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{3}\cdot\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}\cdot\frac{x^4}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\cdot\frac{x^3}{\sin^3 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 = \frac{0^2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1^3 = 0\,.$$

**Esercizio 2.** Si calcoli il limite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\ln^2(x+1)}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\ln^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\ln^2(x+1)}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\left[\ln^2(x+1)\right]\cdot(\sqrt{\cos x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\ln^2(x+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\ln(x+1)}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} = -\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\,.$$

**Esercizio 3.** Si calcoli il limite,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\ln(1+3\,x^2)}}{x}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; risulta:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\ln(1+3\,x^2)}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\ln(1+3\,x^2)}}{-|x|} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{\ln(1+3\,x^2)}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{3\cdot\frac{\ln(1+3\,x^2)}{3\,x^2}} = -\sqrt{3\cdot 1} = -\sqrt{3}\,.$$

**Esercizio 4.** Si calcoli il limite, al variare del parametro reale $a \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x\,\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x\;\;\ln(1+a\,x)}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$; risulta:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{a}\cdot\frac{\tan x}{\sin x}\cdot\frac{a\,x}{\ln(1+a\,x)}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{a\,x}{\ln(1+a\,x)}\cdot\left(-\sqrt{\frac{(1+\cos x)\,(1-\cos x)}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{a\,x}{\ln(1+a\,x)}\cdot\sqrt{1+\cos x}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{a}\,.$$

**Esercizio 5.** Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln\left(1+\dfrac{2-x}{x}\right)}{x^2-4\,x+4}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$; risulta:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln\left(1+\dfrac{2-x}{x}\right)}{(2-x)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln\left(1+\dfrac{2-x}{x}\right)}{2-x}\cdot\frac{1}{2-x} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln\left(1+\dfrac{2-x}{x}\right)}{\dfrac{2-x}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\dfrac{2-x}{x}\right)}{\dfrac{2-x}{x}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2-x}\right)}_{\to +\infty} = +\infty\,.$$

**Esercizio 6.** Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(1-e^{-4/x}\right)$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $+\infty\cdot 0$. Ponendo $t = -\dfrac{4}{x}$ si ottiene:

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(1-e^{-4/x}\right) = \lim_{t\to 0^-} -\frac{4}{t}\left(1-e^{t}\right) = \lim_{t\to 0^-} 4\cdot\frac{e^t-1}{t} = 4\cdot 1 = 4\,.$$

Si osservi che, in modo del tutto analogo, si trova anche il limite per $x\to -\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} x\left(1-e^{-4/x}\right) = 4\,.$$

**Esercizio 7.** Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\ 3\,x\,\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $-\infty\cdot 0$. Con la sostituzione $t=\dfrac{2}{x}$ si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\ 3\cdot x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to 0^-}\ 3\cdot\frac{2}{t}\cdot\ln(1+t)=\lim_{t\to 0^-}\ 6\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}=6\cdot 1=6\ .$$

Si osservi che, in modo del tutto analogo, si trova anche il limite per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\ 3\,x\,\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=6\ .$$