Esercizi sui limiti 19/12/2020 - Francesco Daddi

Esercizio 1. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$.

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $+\infty-\infty$. Riscriviamo il limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x\,\cos x}{x\,\sin x}\ ;$$

il limite ora si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; se applichiamo la regola di de l'Hopital si ricava:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x\,\cos x}{x\,\sin x}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x\,\sin x}{\sin x+x\,\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\,\sin x}{x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}\cdot\sin x}{\cancel{x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1}+\cos x}=\frac{0}{1+1}=0\ .$$

Si noti che si ottiene lo stesso risultato se calcoliamo il limite della stessa funzione per $x\to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=0\ .$$

Esercizio 2. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x}$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; applicando la regola di de l'Hopital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{\cos x}=\frac{1+0}{1}=1\ .$$

In alternativa, senza la regola di de l'Hopital, possiamo riscrivere il limite nella forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{\sin x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)}_{\to 1}+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{x}_{\to 0}\right]=1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=1\ .$$

Esercizio 3. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - \cos x}{\sin^2 x}$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$; applicando la regola di de l'Hopital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - \cos x}{\sin^2 x} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + \sin x}{2\,\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{e^x + \sin x}^{\to 1}}{\underbrace{\sin(2\,x)}_{\to 0^-}} = -\infty \ .$$

In alternativa, senza la regola di de l'Hopital, possiamo riscrivere il limite nella forma:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{e^x - 1}{\sin^2 x} + \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left[\underbrace{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sin x}\right)}_{\to -\infty} + \underbrace{\left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right)}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}_{\to 1^2}\right] = -\infty \ .$$

Esercizio 4. Si calcoli il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $+\infty - \infty$ per $x \to 0^+$ e nella forma $-\infty + \infty$ per $x \to 0^-$. Riscriviamo il limite nella forma

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x\big(e^x - 1\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)}_{\to 1};$$

per la prima frazione applichiamo la regola di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}_{\to 1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \ ;$$

in definitiva per il limite iniziale si ha

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2}\right)}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)}_{\to 1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \ .$$

Esercizio 5. Si calcoli il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 1 + \cos x}{\ln(1 + x)}$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$. Applicando la regola di de l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 1 + \cos x}{\ln(1 + x)} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin x}{\dfrac{1}{1 + x}} = \frac{1}{1} = 1 \ .$$

Risolviamo ora l'esercizio senza ricorrere alla regola di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-1+\cos x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{\ln(1+x)}+\frac{\sin x}{\ln(1+x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[x\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\underbrace{x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)}_{\to 1}+\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)}_{\to 1}\right]=$$

$$=0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1+1\cdot 1=1\ .$$

Esercizio 6. Si calcoli il limite $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\,\cos x-1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$. Applicando la regola di de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\,\cos x-1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-2\,\sin x}{-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1}=\sqrt{3}\ .$$

Esercizio 7. Si calcoli il limite $\displaystyle\lim_{x\to 1}\ (x-1)\ \tan\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $0\cdot\infty$; riscriviamolo nella forma

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\ \tan\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}{\frac{1}{x-1}}$$

essendo ora nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ applichiamo la regola di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}{\frac{1}{x-1}}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2\,\cos^2\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{1+\cos(\pi\,x)}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\ -\pi\cdot\frac{(x-1)^2}{1+\cos(\pi\,x)}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to 1}\ -\pi\cdot\frac{2\,x-2}{-\pi\,\sin(\pi\,x)}=\lim_{x\to 1}\cancel{-\pi}\cdot\frac{2\,x-2}{\cancel{-\pi}\cdot\sin(\pi\,x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\,x-2}{\sin(\pi\,x)}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi\cdot\cos(\pi\,x)}=\frac{2}{\pi\cdot\cos(\pi)}=\frac{2}{\pi\cdot(-1)}=-\frac{2}{\pi}\ .$$

Esercizio 8. Si calcoli il limite $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-e^{2\,x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$.

Soluzione. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$; applicando la regola di de l'Hopital si ricava:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-e^{2\,x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\,e^{2\,x}}{2\left(1-e^{-x}\right)e^{-x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\cdot \overbrace{e^{2\,x}}^{\to 1}}{2\cdot \underbrace{\left(1-e^{-x}\right)}_{\to 0^-}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 1}} = \frac{-2}{0^-} = +\infty\,.$$