Esercizi di riepilogo sull’ellisse   II^{a}A Classico   16/11/2015

Questi esercizi servono per ripassare tutti gli argomenti svolti sull’ellisse. Si consiglia di rivedere per bene gli argomenti svolti in classe.

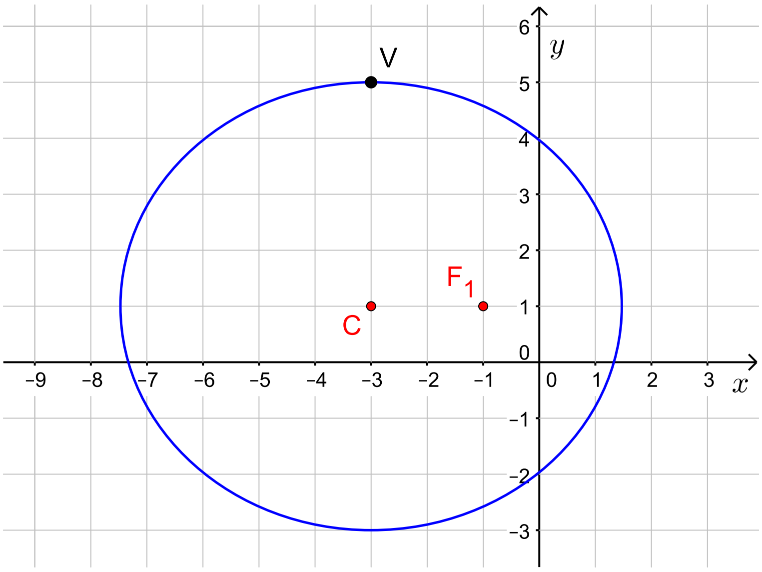
Esercizio 1. Data l’ellisse $\gamma : x^2 + 4\,y^2 - 2\,x - 1 = 0$ si determinino le equazioni delle rette uscenti dal punto $P(-1, 0)$ e tangenti a γ. Si determinino poi le equazioni delle rette uscenti dal punto $Q(3, 0)$ e tangenti a γ.
[Sol. *Le rette uscenti da P sono $t_1 : y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$ tangente in $T_1\left(0\,,\,\frac{1}{2}\right)$ e $t_2 : y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}$ tangente in $T_2\left(0\,,\,-\frac{1}{2}\right)$. Le rette uscenti da Q sono $t_3 : y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}$ tangente in $T_3\left(2\,,\,\frac{1}{2}\right)$ e $t_4 : y = \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2}$ tangente in $T_4\left(2\,,\,-\frac{1}{2}\right)$.*

Esercizio 2. Data l’ellisse $\gamma : x^2 + 4\,y^2 = 32$ si determini l’equazione della retta tangente a γ nel suo punto $P(-4, 2)$. Si determinino poi le equazioni delle rette tangenti a γ ed aventi coefficiente angolare (pendenza) uguale a $\dfrac{1}{2}$. Esiste un metodo veloce per trovare queste due rette?
[Sol. *L’equazione della tangente in P è $x - 2\,y + 8 = 0$, ossia $y = \dfrac{1}{2}\,x + 4$. Le rette tangenti a γ ed aventi pendenza uguale a $\dfrac{1}{2}$ sono $y = \dfrac{1}{2}\,x + 4$ e $y = \dfrac{1}{2}\,x - 4$.*]

Esercizio 3. Di un’ellisse γ conosciamo i fuochi $F_1 = (3, -1)$ e $F_2 = (3, 5)$ e una direttrice $d_1 : y = -5$. Qual è il centro C di γ? Qual è l’equazione dell’altra direttrice? Quanto misura il semiasse maggiore? Qual è l’eccentricità di γ? Qual è l’equazione cartesiana di γ? E la sua area?
[Sol. *Il centro è $C = (3, 2)$. L’altra direttrice è $d_2 : y = 9$. Il semiasse maggiore è $b = \sqrt{21}$. Eccentricità $= \dfrac{3}{\sqrt{21}}$. Equazione cartesiana $\gamma : \dfrac{(x-3)^2}{12} + \dfrac{(y-2)^2}{21} = 1$, ossia $\gamma : 7\,x^2 + 4\,y^2 - 42\,x - 16\,y - 5 = 0$. Area $= 6\sqrt{7}\,\pi$.*]

Esercizio 4. Data l’ellisse $\gamma : 25\,x^2 + 9\,y^2 + 100\,x - 18\,y - 116 = 0$, si determini la sua equazione in forma canonica, ossia della forma $\dfrac{(x - x_C)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$. Qual è il centro C di γ? Quali sono le lunghezze dei semiassi? Quali sono i fuochi e le direttrici di γ? Qual è l’eccentricità di γ? E la sua area? Si verifichi che il punto $P(-4, -3)$ non appartiene a γ. Sai dire se P è interno o esterno a γ?
[Sol. *$\gamma : \dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$. Il centro è $C(-2, 1)$; i semiassi sono $a = 3$ e $b = 5$. I fuochi sono $F_1(-2, 5)$ e $F_2(-2, -3)$; le rispettive direttrici sono $d_1 : y = \dfrac{29}{4}$ e $d_2 : y = -\dfrac{21}{4}$.
γ ha eccentricità $e = \dfrac{4}{5}$ ed area pari a $15\,\pi$. Il punto P è esterno all’ellisse.*]

Esercizio 5. Facendo riferimento alla figura, si determini l’equazione cartesiana dell’ellisse γ. Si determinino poi le direttrici di γ. Si completi la frase: *γ è il luogo geometrico dei punti P del piano tali che...*



[Sol. *L’ellisse γ ha equazione $\dfrac{(x+3)^2}{20} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$, ossia $4\,x^2 + 5\,y^2 + 24\,x - 10\,y - 39 = 0$. Le equazioni delle direttrici sono $d_1 : x = 7$ e $d_2 : x = -13$. L’ellisse γ è il luogo geometrico dei punti P del piano tali che $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 4\sqrt{5}$, dove $F_2 = (-5, 1)$.*]