SOLUZ. 11/12/21 ASSENTI

1) $r_{AB}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$; $r_{BC}: y = \frac{2}{3}x - 1$

$r_{AC}: y = -3x + 10$

$$R: \begin{cases} y \leq -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \\ y \geq \frac{2}{3}x - 1 \\ y \geq -3x + 10 \end{cases}$$

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}_{-1\cdot 3 + 3 \cdot 2} = \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{-1\cdot 3 + 3\cdot 2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{130}} \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{130}}\right) \approx 74{,}745^\circ.$$

2) $r_{AB}: 3x - 4y + 17 = 0$; asse x : $y = 0$

$$\frac{|3x - 4y + 17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \cdot |y| \Rightarrow |3x - 4y + 17| = 15 \cdot |y|$$

$$3x - 4y + 17 = \pm 15y \quad \begin{cases} \rightarrow 3x + 11y + 17 = 0 \\ \rightarrow 3x - 19y + 17 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}$ è l'UNIONE delle rette scritte.

3) $$P_k: \begin{cases} x + y = 3k \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3k \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$// \quad 3y = 3k + 6 \rightarrow y = k + 2$$

$$\begin{cases} x = 3k - (k+2) = 2k - 2 \\ y = k + 2 \end{cases} \Rightarrow P_k(2k-2 ; k+2)$$

$$t: y = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot (x - 0) + 3 \Rightarrow t: y = 2x + 3$$

$t: 2x - y + 3 = 0$

$$\frac{|2\cdot(2k-2)-(k+2)+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 3\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|3k-3|}{\sqrt{5}} = 3\cdot\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |3(k-1)| = 3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} \Rightarrow \cancel{3}\cdot|k-1| = \cancel{3}\cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-1 = \pm 5 \quad \boxed{k_1 = 6} \quad \boxed{k_2 = -4}$$

IN DEFINITIVA I PUNTI SONO $P_1(10; 8)$ e $P_2(-10; -2)$.

4) $\alpha: (x+1)^2 + (y-7)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2 \Rightarrow$

$\alpha: 3x - 5y + 4 = 0.$

$P \in \alpha \Leftrightarrow \exists\, t$ tale che $P\left(t; \frac{3t+4}{5}\right)$.

$\overline{CP}^2 + \overline{DP}^2 = 57 \Rightarrow$

$$\underbrace{(t-3)^2 + \left(\frac{3t+4}{5} - 1\right)^2}_{\overline{CP}^2} + \underbrace{(t-1)^2 + \left(\frac{3t+4}{5} + 2\right)^2}_{\overline{DP}^2} = 57$$

SVOLGENDO I CONTI SI TROVA: $t_{1,2} = -3 \,;\, \frac{163}{34}$

IN DEFINITIVA I PUNTI RICHIESTI SONO:

$P_1(-3; -1)$; $P_2\left(\frac{163}{34}; \frac{125}{34}\right)$.

5) RETTA GENERICA PER $P(-2; 1)$: $y = mx + 2m + 1$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI: (con $m \neq 0$)

$A(0; 2m+1)$, $B\left(-2 - \frac{1}{m}; 0\right)$.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \frac{1}{2}\cdot|2m+1|\cdot\left|-2-\frac{1}{m}\right|$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot |2m+1| \cdot \left|2 + \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{2} \cdot |2m+1| \cdot \left|\frac{2m+1}{m}\right|$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot |2m+1| \cdot |2m+1| \cdot \frac{1}{|m|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m+1)^2}{|m|}.$$

ESSENDO $m > 0$ (DAL TESTO del PROBLEMA)

RISULTA:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m+1)^2}{m}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(2m+1)^2}{m} = \underbrace{\frac{25}{4}}_{6{,}25} \Rightarrow \dots \Rightarrow m_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ 1/8 \end{cases}$$

IN DEFINITIVA ABBIAMO $m_1 = 2$ e $m_2 = \frac{1}{8}$.

6) BISETTRICI delle RETTE $4x - 3y + 2 = 0$ e $y = 2$:

$$\frac{|4x - 3y + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = |y - 2| \Rightarrow 4x - 3y + 2 = \pm 5 \cdot (y - 2)$$

LA BISETTRICE CON $m > 0$ è: $x - 2y + 3 = 0$.

CALCOLIAMO ORA LE BISETTRICI delle RETTE

$x - 2y + 3 = 0$ e $y = 2$:

$$\frac{|x - 2y + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = |y - 2| \Rightarrow x - 2y + 3 = \pm\sqrt{5} \cdot (y - 2)$$

LA BISETTRICE CON $m > 0$ è: $\boxed{y = (\sqrt{5} - 2) \cdot (x - 1) + 2}$.