SOLUZIONI 21/10/2020

1) $(2k+1)x+(-k-2)y+4-k=0$

$$k(2x-y-1)\quad +x-2y+4=0$$

$r: 2x-y-1=0$

$s: x-2y+4=0$

$$\Rightarrow C: \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow C(2;3).$$

a) $(2k+1)\cdot(-2)+(-k-2)\cdot(-3)+4-k=0$

$$-2k+8=0 \Rightarrow k=4$$

$$(2\cdot 4+1)\cdot x+(-4-2)\cdot y+4-4=0$$

$\boxed{9x-6y=0}$ è la retta richiesta.

b) $\begin{pmatrix} 2k+1 \\ -k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2k+1=5\lambda \\ -k-2=-\lambda \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=-3 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

QUINDI la retta è

$$\left(2\cdot(-3)+1\right)x+\left(-(-3)-2\right)y+4+3=0$$

$$\Rightarrow -5x+y+7=0$$

$\boxed{5x-y-7=0}$ è la retta richiesta.

2° METODO: $(2k+1)\cdot(-1)-(-k-2)\cdot 5=0$

$$\Rightarrow k=-3 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{5x-y-7=0}.$$

3° METODO: $5x-y+h=0$

IMPONGO IL PASSAGGIO PER $C(2;3)$:

$$5\cdot 2-3+h=0 \Rightarrow h=-7$$

QUINDI la retta richiesta è $\boxed{5x-y-7=0}$.

c) $\begin{pmatrix} 2k+1 \\ -k-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2k+1)\cdot 4 + (-k-2)\cdot 5 = 0$

$\Rightarrow k = 2$

QUINDI LA RETTA RICHIESTA È

$(2\cdot 2+1)x + (-2-2)y + 4 - 2 = 0$ da cui ricavo:

$\boxed{5x - 4y + 2 = 0}$

2° METODO: UN VETTORE $\perp \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ È $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, QUINDI

la retta richiesta è

$5x - 4y + h = 0$

IMPONGO IL PASSAGGIO PER $C(2;3)$

$5\cdot 2 - 4\cdot 3 + h = 0 \Rightarrow h = 2$

$\Rightarrow \boxed{5x - 4y + 2 = 0}$

d) $\mathcal{F}'$: $\lambda(x+y-1) - 2y = 0$

r': $x+y-1=0$

s': $y=0$

$\Rightarrow C' \begin{cases} x+y-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C'(1;0)$

LA RETTA COMUNE AI DUE FASCI È LA RETTA PASSANTE

PER $C(2;3)$ e $C'(1;0)$.

LA RETTA RICHIESTA HA EQUAZIONE $\boxed{y = 3x - 3}$.

2° METODO: $\begin{pmatrix} 2k+1 \\ -k-2 \\ 4-k \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - 2 \\ -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2k+1 = \lambda\mu \\ -k-2 = \lambda\mu - 2\mu \\ 4-k = -\lambda\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k - \lambda\mu = -1 \\ k + \lambda\mu - 2\mu = -2 \\ k - \lambda\mu = 4 \end{cases}$$

$(\lambda\mu = z)$ IL SISTEMA È RISOLTO DA

$$\begin{cases} k = -5 \\ \lambda\mu = -9 \\ \mu = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -5 \\ \lambda = 3/2 \\ \mu = -6 \end{cases}$$

QUINDI la retta richiesta è

$$(2\cdot(-5)+1)x + (+5-2)y + 4 + 5 = 0$$

$$-9x + 3y + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{3x - y - 3 = 0}$$

OPPURE:

$$\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2} - 2\right)y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3x - y - 3 = 0}.$$

2) $r: 3x + y + 6 = 0$

s retta $\perp r$ e PASSANTE PER $P(1;0)$

$s: x - 3y + h = 0$

$1 - 3\cdot 0 + h = 0 \rightarrow h = -1$

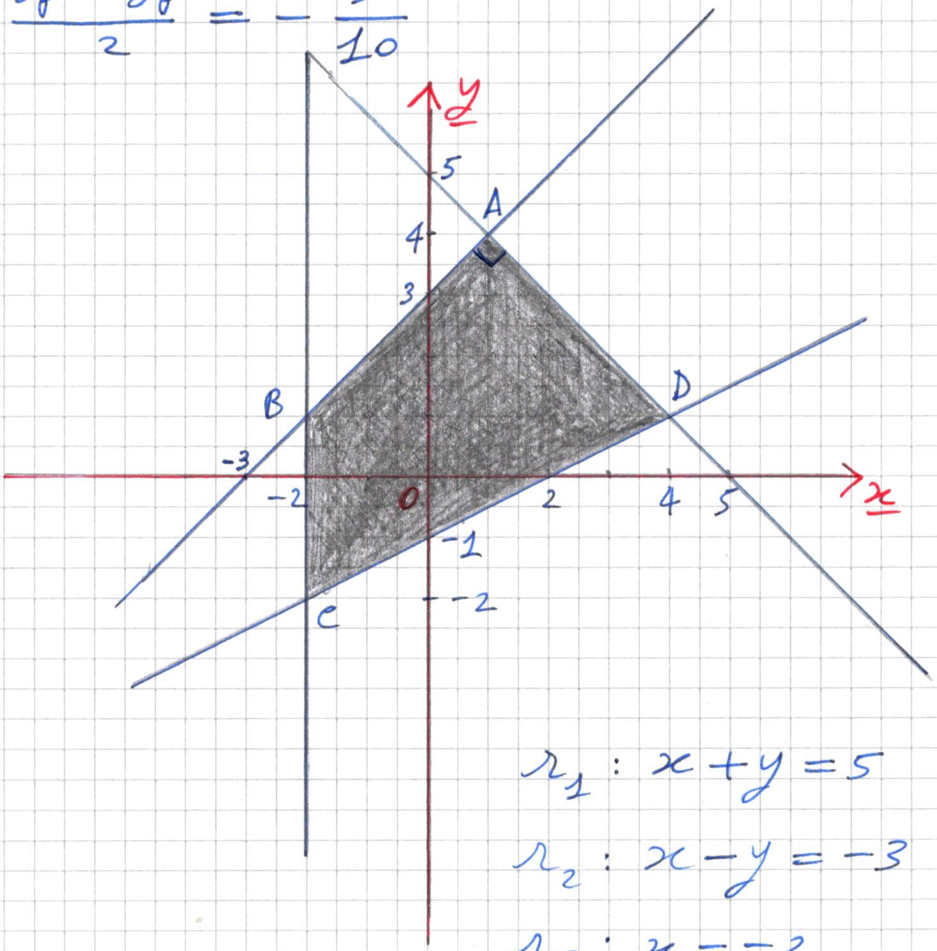
$s: \; x - 3y - 1 = 0$

$$H: \begin{cases} 3x + y + 6 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow H\left(-\frac{17}{10}; -\frac{9}{10}\right)$$ PROIEZ. ORTOG. di P su r.

$\overline{PP'}$ HA COME PUNTO MEDIO H, QUINDI:

$$\begin{cases} \dfrac{x_P + x_{P'}}{2} = -\dfrac{17}{10} \\[2ex] \dfrac{y_P + y_{P'}}{2} = -\dfrac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow P'\left(-\frac{22}{5}; -\frac{9}{5}\right)$$

3)



$r_1: x + y = 5$

$r_2: x - y = -3$

$r_3: x = -2$

$r_4: x - 2y = 2$

GLI ANGOLI SONO:

$\alpha = 90°$ (le rette r_1 e r_2 sono $\perp$)

$\beta = 135°$ (dal disegno)

OPPURE:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \cos\beta$$

$$0 \cdot 3 + (-3) \cdot 3 = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 135°}$$

VEDIAMO γ:

$$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\sqrt{0^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}\cdot\cos\gamma$$

$$0\cdot 2+3\cdot 1=3\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\gamma=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cong 63{,}43^\circ$$

VEDIAMO δ:

$$\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\sqrt{3^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}\cdot\cos\delta$$

$$6-3=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\delta \Rightarrow \cos\delta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\delta=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cong 71{,}57^\circ$$

IN ALTERNATIVA:

$$\delta=360^\circ-\alpha-\beta-\gamma=\ldots\cong 71{,}57^\circ.$$

4) $y-2=0$; $4x+3y-14=0$

$$|y-2|=\frac{|4x+3y-14|}{\sqrt{4^2+3^2}} \Rightarrow 5|y-2|=|4x+3y-14|$$

$$5(y-2)= \begin{cases} 4x+3y-14 \\ -4x-3y+14 \end{cases}$$

bis_1: $4x-2y-4=0 \rightarrow \boxed{2x-y-2=0}$

bis_2: $4x+8y-24=0 \rightarrow \boxed{x+2y-6=0}$

IL LUOGO RICHIESTO È L'UNIONE delle DUE RETTE.

$$\boxed{bis_1 \cup bis_2}$$

$\boxed{2^a \text{ RICHIESTA}}$

IL LUOGO dei PUNTI CHE DISTANO 2 DALLA RETTA $y=2$

è FORMATO DALLE RETTE $y=0$ e $y=4$.

PER OTTENERE I PUNTI RICHIESTI è SUFFICIENTE INTERSECARE

$y=0$ CON bis_1 e bis_2 e INTERSECARE $y=4$

CON bis_1 e bis_2.

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=4 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$$

i PUNTI RICHIESTI SONO 4:

$$A(1;0),\ B(6;0),\ C(3;4),\ D(-2;4).$$

5) la retta AB ha EQUAZIONE $y=-\frac{1}{2}x+2$

OVVERO $x=-2y+4$.

$$P(-2t+4;t)\ ;\quad 4\cdot\overline{BP}=7\cdot\overline{AP}$$

$$4\cdot\sqrt{(-2t+4-2)^2+(t-1)^2}=7\cdot\sqrt{(-2t+4+2)^2+(t-3)^2}$$

$$16\cdot\left[(2-2t)^2+(t-1)^2\right]=49\cdot\left[(6-2t)^2+(t-3)^2\right]$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow 33t^2-262t+425=0$$

$$t_{1,2}= \begin{cases} 17/3\ (\approx 5{,}67) & \underline{\text{NON}} \text{ ACCETTABILE.} \\ 25/11\ (\approx 2{,}27) \end{cases}$$

ESSENDO $1<t<3 \Rightarrow t=\frac{25}{11}$

$$P\left(-2\cdot\frac{25}{11}+4;\frac{25}{11}\right) \to \boxed{P\left(-\frac{6}{11};\frac{25}{11}\right)}$$

$C \in y = 2x - 3$ QUINDI $C(t; 2t-3)$

CON $t > 2$.

$$\overline{BC} = \frac{5}{4}\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(2-t)^2 + (1-2t+3)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 5(t-2)^2 = \frac{125}{16} \Rightarrow (t-2)^2 = \frac{25}{16}$$

$$t_{1,2} = 2 \pm \frac{5}{4} \qquad t_{1,2} = \begin{cases} 13/4 & (>2) \text{ ACCETTABILE} \\ 3/4 & (<2) \text{ NON ACCETT.} \end{cases}$$

$$C\left(\frac{13}{4}; 2 \cdot \frac{13}{4} - 3\right) \sim C\left(\frac{13}{4}; \frac{7}{2}\right).$$

6) retta AB: $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ $\quad (3x - 4y + 6 = 0)$

$\overline{AB} = 5$, QUINDI $\underbrace{\text{AREA}(\overset{\triangle}{ABC})}_{\frac{1}{2}\cdot 5 \cdot h} = 18$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = 18 \Rightarrow h = \frac{36}{5}$$

LUOGO RICHIESTO:

$$\frac{|3x - 4y + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{36}{5} \Rightarrow \frac{|3x - 4y + 6|}{\cancel{5}} = \frac{36}{\cancel{5}}$$

$$\Rightarrow 3x - 4y + 6 = \pm 36$$

$r_1: 3x - 4y - 30 = 0$; $\quad r_2: 3x - 4y + 42 = 0$.

IL LUOGO RICHIESTO È L'UNIONE $r_1 \cup r_2$.

7) $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$. $\qquad \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot h = 15 \Rightarrow h = 3\sqrt{5}$

L'ASSE del SEGMENTO AB è:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-7)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 12 - 2x.$$

$c \in asse_{AB} \Rightarrow c(t; 12-2t)$

$\overline{cM} = 3\sqrt{5}$

$M_{AB} = \left(\frac{3+7}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = (5; 2).$

$\overline{cM} = \sqrt{(t-5)^2 + (12-2t-2)^2}$

$\overline{cM}^2 = (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow (t-5)^2 + (10-2t)^2 = 45$

$\rightarrow \ldots \Rightarrow 5t^2 - 50t + 80 = 0$

$t_{1,2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$ $\quad c_1(8; -4)$
$\quad c_2(2; 8).$

8) retta passante da A e B : $x - 3y + 8 = 0$ (r).

il luogo dei punti aventi distanza $d = \frac{13}{\sqrt{10}}$ è:

$$\frac{|x-3y+8|}{\cancel{\sqrt{1^2+3^2}}} = \frac{13}{\cancel{\sqrt{10}}} \Rightarrow x - 3y + 8 = \pm 13$$

$\Rightarrow x - 3y - 5 = 0 \quad \vee \quad x - 3y + 21 = 0.$

$\left(y = \frac{1}{3}x - \underbrace{\frac{5}{3}}_{<0}\right)$ $\quad \left(y = \frac{1}{3}x + \underbrace{7}_{>0}\right)$

è la retta s. $\quad$ NON è la retta s (in quanto $7 > 0$)

luogo dei punti equidistanti da r e s:

$$\frac{|x-3y+8|}{\cancel{\sqrt{10}}} = \frac{|x-3y-5|}{\cancel{\sqrt{10}}} \Rightarrow$$

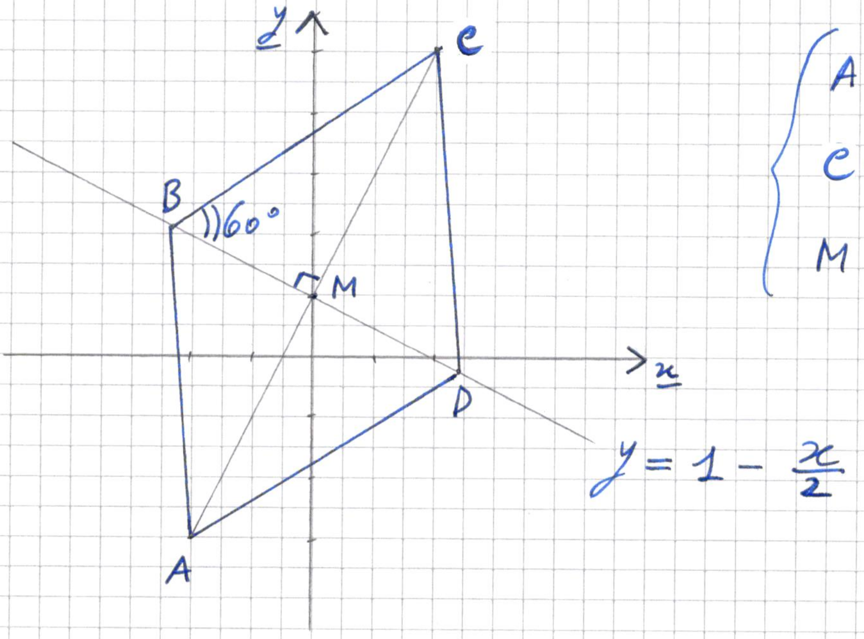
$x - 3y + 8 = \pm(x - 3y - 5)$

1) $x - 3y + 8 = x - 3y - 5 \Rightarrow \emptyset$ (insieme vuoto).

$\boxed{2}$ $x - 3y + 8 = -x + 3y + 5$

$\boxed{2x - 6y + 3 = 0}$ è IL LUOGO RICHIESTO.

9)



$$\begin{cases} A(-2;-3) \\ C(2;5) \\ M(0;1) \end{cases}$$

$\overline{MC} = 2\sqrt{5}$. $\qquad \overline{BM} = \overline{DM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\overline{MC}}_{2\sqrt{5}} = \frac{2}{3}\sqrt{15}$.

$B\left(t; 1 - \frac{t}{2}\right)$ CON $t < 0$ ($B \in 2°$ QUADRANTE).

$$\overline{BM} = \sqrt{(t-0)^2 + \left(1 - \frac{t}{2} - 1\right)^2}$$

$$\overline{BM}^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{15}\right)^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{5}{4}t^2 = \frac{20}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right);$$

$$D\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

2° METODO: $\vec{BA} \cdot \vec{BM} = \|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BM}\| \cdot \cos(60°) \Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2-t \\ -3+\frac{t}{2}-1 \end{pmatrix}}_{\vec{OA}-\vec{OB}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0-t \\ 1+\frac{t}{2}-1 \end{pmatrix}}_{\vec{OM}-\vec{OB}} = \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} -2-t \\ -3+\frac{t}{2}-1 \end{pmatrix} \right\|}_{\|\vec{BA}\|} \cdot \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} -t \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix} \right\|}_{\|\vec{BM}\|} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos(60°)}$$

$$(-2-t)\cdot(-t)+\left(\frac{t}{2}-4\right)\cdot\left(\cancel{1}+\frac{t}{2}-\cancel{1}\right)=$$

$$=\sqrt{(-2-t)^2+\left(\frac{t}{2}-4\right)^2}\cdot\sqrt{t^2+\frac{t^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}\;;$$

ELEVIAMO AL QUADRATO; SVOLGENDO I CALCOLI SI TROVA

$$\frac{25}{16}t^4=\frac{25}{64}t^4+\frac{25}{4}t^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\frac{25}{64}t^2\cdot\left(3t^2-16\right)=0$$

$t=0$ (<u>NON</u> ACCETTABILE)

$$t_{1,2}=\pm\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} B\left(-\frac{4}{\sqrt{3}};1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ D\left(\frac{4}{\sqrt{3}};1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \end{cases}$$