Esercizi svolti di aritmetica

Esercizio 1. *Dimostrare che il quadrato di un numero intero che finisce per* 25 *finisce per* 625.

Soluzione. Osserviamo che un numero che finisce per 25 può essere scritto nel seguente modo: $100\,x + 25$ (ad esempio $74325 = 74300 + 25 = 100 \cdot 743 + 25$). Se facciamo il quadrato troviamo

$$(100\,x + 25)^2 = 10000\,x^2 + 2 \cdot (100\,x) \cdot 25 + 625 = 10000\,x^2 + 5000\,x + 625\ ; \tag{1}$$

analizzando la formula (1), i tre termini ottenuti osserviamo che i primi due termini sono multipli di 1000; l'addendo 625 è inferiore a 1000, e quindi le ultime tre cifre del numero ottenuto saranno proprio 625. □

Si può dimostrare che il quadrato di un numero che finisce per 625 finisce per 0625. Più in generale, il quadrato di un numero che finisce per $P625$, dove P è una cifra pari > 0, finisce per 90625; se invece il numero finisce per $D625$, dove D è una cifra dispari, il quadrato finirà per 40625.

Esercizio 2. *Dimostra che il quadrato di un numero intero che finisce per* 76 *finisce anch'esso per* 76.

Soluzione. Un numero che finisce per 76 può essere scritto nella forma seguente:

$$100\,x + 76$$

dove x indica il numero delle centinaia. Se ne facciamo il quadrato otteniamo:

$$(100\,x + 76)^2 = 10000\,x^2 + 2 \cdot (100\,x) \cdot 76 + 5776 = 10000\,x^2 + 15200\,x + 5776\ ;$$

osserviamo ora che i primi due addendi sono entrambi multipli di 100 (finiscono infatti con un doppio 0): questo fatto implica che il numero finale finirà per 76. □

Si può dimostrare che il quadrato di un numero che finisce per 376 finisce anch'esso per 376.

Esercizio 3. *Un vostro amico vi fa questo gioco: "Pensa un numero; aggiungi* 2*; moltiplica il risultato per* 3*; sottrai* 5*; sottrai il numero pensato; moltiplica per* 2*; sottrai* 1*." Voi rispondete il numero che avete calcolato ed il vostro amico riesce ad indovinare il numero che voi avete pensato all'inizio. Si tratta di magia? Di fortuna? Oppure c'è alla base un procedimento matematico?*

Soluzione. E' chiaro che dietro a questo giochetto c'è una base matematica; vediamo di analizzarne ogni fase. Indichiamo con x il numero che avete pensato; aggiungendo 2 otteniamo $x + 2$; moltiplicando il risultato per 3 si ricava $3(x + 2) = 3\,x + 6$; sottraendo 5 si ottiene $3\,x + 6 - 5 = 3\,x + 1$; sottraendo il numero pensato abbiamo $3\,x + 1 - x = 2\,x + 1$; dopo la moltiplicazione per 2 abbiamo $4\,x + 2$; infine, sottraendo 1 abbiamo $4\,x + 2 - 1 = 4\,x + 1$. Il vostro amico a questo punto vi chiede il numero che avete ottenuto; questo numero corrisponde a $4\,x + 1$. Ecco il ragionamento che adotta il vostro amico: toglie 1, così ottiene $4\,x$; infine divide per 4, ricavando in questo modo x, cioè il numero pensato.

Altro che magia o fortuna, il vostro amico ha imparato la matematica!

Esercizio 4. *Considera un numero qualsiasi di due cifre e il numero che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre. E' vero che la differenza tra il quadrato del numero maggiore e il quadrato del numero minore risulta sempre divisibile per* 99*? Spiega.*

Soluzione. Indichiamo il numero di due cifre nel seguente modo:

$$10\,a+b$$

dove a sono le decine e b le unità del numero. Chiaramente, il numero che si ottiene scambiando l'ordine delle cifre può essere scritto nella forma:

$$10\,b+a\;;$$

supponendo senza perdita di generalità che a sia maggiore di b, proviamo a sviluppare la differenza dei quadrati, come indicato dal testo dell'esercizio:

$$(10\,a+b)^2-(10\,b+a)^2=100\,a^2+20\,ab+b^2-100\,b^2-20\,ab-a^2$$

semplificando otteniamo:

$$99\,a^2-99\,b^2$$

questa espressione può essere scritta nel modo seguente:

$$99\cdot(a^2-b^2)$$

quindi abbiamo ottenuto un multiplo di 99, indipendentemente dai valori di a e b. Ad esempio, per $a=5$ e $b=3$, abbiamo: $(53)^2-(35)^2=99\cdot(5^2-3^2)=99\cdot 16$. □

Esercizio 5. *Dimostrare che il quadrato di un numero intero che finisce per* 5 *può essere semplicemente calcolato moltiplicando il numero delle decine per il numero delle decine* +1 *e collocando* 25 *in fondo al risultato ottenuto.*
Esempi:

$$\begin{aligned}(35)^2\;&\Rightarrow\;3\cdot4=12\;\Rightarrow\;(35)^2=1225\\(75)^2\;&\Rightarrow\;7\cdot8=56\;\Rightarrow\;(75)^2=5625\\(105)^2\;&\Rightarrow\;10\cdot11=110\;\Rightarrow\;(105)^2=11025\end{aligned}\tag{2}$$

Soluzione. Scriviamo un numero intero che finisce per 5 nel seguente modo: $10\,x+5$; si osservi che x è il numero delle decine. Facciamone il quadrato:

$$(10\,x+5)^2=100\,x^2+2\cdot(10\,x)\cdot5+25=100\,x^2+100\,x+25$$

a questo punto si osserva che il risultato può essere scritto nella forma seguente:

$$100\,x^2+100\,x+25=100\,x(x+1)+25$$

l'espressione $x(x+1)$ è il risultato della moltiplicazione della cifra delle decine (ovvero x) per se stessa aumentata di una unità (cioè $x+1$). Moltiplicare $x(x+1)$ per 100 e sommare 25 è equivalente a collocare 25 alla destra del prodotto $x(x+1)$ come visto negli esempi (2); le ultime due cifre sono 25 perché il termine $100\,x(x+1)$ è, ovviamente, multiplo di 100. □

Esercizio 6. *Somma al quadrato di un numero dispari il quadruplo del numero naturale che segue il numero dispari stesso. Dimostra che si ottiene un quadrato perfetto. Qual è la radice quadrata del quadrato ottenuto?*

Soluzione. Scriviamo prima di tutto il numero dispari nella forma "consueta" $2\,x+1$ (analizzeremo in seguito questa scelta); seguendo il testo dell'esercizio dobbiamo svolgere la seguente espressione algebrica:

$$(2\,x+1)^2 + 4\cdot(2\,x+2)$$

semplificando otteniamo:

$$4\,x^2 + 12\,x + 9$$

il testo ci chiede di dimostrare che otteniamo un quadrato perfetto; tradotto in termini algebrici, ciò equivale a dire che il trinomio appena calcolato deve essere il quadrato di un binomio. Infatti risulta:

$$4\,x^2 + 12\,x + 9 = (2\,x+3)^2$$

la radice quadrata positiva è $2\,x+3$, ovvero il numero dispari successivo al dispari preso in considerazione all'inizio. $\square$

Analizzando la nostra scelta (abbiamo indicato il numero dispari con $2\,x+1$) notiamo che non è l'unica possibile: scegliendo infatti $2\,x-1$ abbiamo

$$(2\,x-1)^2 + 4\cdot(2\,x)$$

e, semplificando, otteniamo:

$$4\,x^2 + 4\,x + 1 = (2\,x+1)^2\ ;$$

si osservi che $(2\,x+1)$ è il numero dispari successivo a $(2\,x-1)$.

Esercizio 7. *Dimostrare che il prodotto di tre numeri interi consecutivi è uguale al cubo del numero centrale meno il numero centrale stesso.*

Soluzione. Indichiamo con x il numero centrale; con questa scelta gli altri due sono, chiaramente $x-1$ e $x+1$. Scriviamo il prodotto di questi tre numeri:

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$$

scambiando l'ordine dei primi due fattori abbiamo:

$$x\cdot(x-1)\cdot(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x$$

a questo punto basta osservare l'espressione (x^3-x) e confrontarla con il testo: il cubo del numero centrale è, infatti, proprio x^3. $\square$

E' interessante analizzare la soluzione che si ottiene scegliendo x per indicare il numero più piccolo dei tre. In questo caso i tre numeri sono x, $x+1$ e $x+2$, per cui il loro prodotto è uguale a:

$$x(x+1)(x+2) = x^3 + 3\,x^2 + 2\,x$$

qui è più difficile riconoscere che l'ultima espressione scritta è uguale al cubo del numero centrale meno il numero centrale; controlliamo:

$$(x+1)^3 - (x+1) = x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1 - x - 1 = x^3 + 3\,x^2 + 2\,x\ .$$

Esercizio 8. *Dimostrare che, sommando al quadrato di un numero intero il doppio del numero stesso ed incrementando il risultato di* 1*, otteniamo un quadrato perfetto.*

Soluzione. Indichiamo con x il numero intero; l'espressione è la seguente:

$$x^2 + 2 \cdot x + 1$$

non è difficile vedere che questa espressione è un quadrato perfetto:

$$x^2 + 2 \cdot x + 1 = (x + 1)^2$$

con questo abbiamo dimostrato ciò che volevamo. Ma non solo: abbiamo dimostrato che il quadrato perfetto si ottiene elevando al quadrato il numero consecutivo al numero intero scelto all'inizio. □

Esercizio 9. *Dimostrare che la somma dei quadrati di due numeri dispari consecutivi è sempre un numero pari ma non è divisibile per* 4*.*

Soluzione. E' molto importante scegliere in modo opportuno la variabile x; possiamo indicare con $(2\,x - 1)$ il numero dispari minore e con $(2\,x + 1)$ quello maggiore (si osservi che sono entrambi dispari e sono consecutivi, ovvero differiscono di 2). Fatta questa scelta, calcoliamo algebricamente la somma dei quadrati: $(2\,x - 1)^2 + (2\,x + 1)^2 = 8\,x^2 + 2$. Per dimostrare che si tratta di un numero pari (ovvero un numero che si può scrivere come prodotto di 2 con un altro numero) è sufficiente mettere un 2 in evidenza: $8\,x^2 + 2 = 2 \cdot (4\,x^2 + 1)$.
Resta ora da dimostrare che $8\,x^2 + 2$ non è divisibile per 4: basta dividere per 4 e notare che il risultato ottenuto, $2\,x^2 + \frac{1}{2}$, è somma di una quantità intera e di una frazione. □

Esercizio 10. *Prendiamo un numero naturale e calcoliamo il seguente prodotto dei seguenti quattro numeri: il numero stesso, il numero che si ottiene aggiungendo* 4 *al numero scelto e i consecutivi di questi due numeri. Sommiamo infine* 4 *al prodotto ottenuto. Dimostrare che si ottiene sempre un quadrato perfetto.*

Soluzione. Indichiamo con x il primo numero; il secondo numero è $x + 4$; gli ultimi due numeri, consecutivi dei primi due, sono $x+1$ e $x+5$. Sommando 4 ricaviamo il seguente polinomio di quarto grado:

$$x(x + 4)(x + 1)(x + 5) + 4 = x^4 + 10\,x^3 + 29\,x^2 + 20\,x + 4\ . \tag{3}$$

Dobbiamo ora riconoscere che l'ultima espressione scritta è un quadrato di "qualcosa"; potrebbe trattarsi del quadrato di un trinomio e, vista la presenza di x^4 e 4, in questo trinomio ci dovranno essere necessariamente x^2 e 2 (infatti risulta $x^4 = (x^2)^2$ e $4 = 2^2$). Non ci possono essere termini di grado maggiore di 2 in quanto il polinomio (3) è di quarto grado. In definitiva questo trinomio avrà la seguente forma: $x^2 + ax + 2$; se ne calcoliamo il quadrato otteniamo:

$$\left(x^2 + a\,x + 2\right)^2 = x^4 + 2\,ax^3 + 4\,x^2 + a^2x^2 + 4\,ax + 4 = x^4 + 2\,ax^3 + (a^2 + 4)x^2 + 4\,ax + 4$$

uguagliando questa espressione alla (3) ricaviamo $a = 5$ e quindi possiamo scrivere:

$$x(x + 4)(x + 1)(x + 5) + 4 = \left(x^2 + 5\,x + 2\right)^2 . \qquad \square$$

Esercizio 11. *Dimostrare che, se sommiamo il quadrato di un numero al quadruplo del numero successivo, si ottiene il quadrato del numero successivo al successivo.*
Soluzione. Indichiamo con x il numero ($x+1$ e $x+2$ sono i numeri successivi); scriviamo la somma indicata dal testo:

$$x^2 + 4 \cdot (x + 1) = x^2 + 4\,x + 4\ ;$$

d'altra parte risulta:

$$x^2 + 4\,x + 4 = (x+2)^2$$

e quindi la dimostrazione è conclusa. $\square$

La scelta fatta non è la migliore; se, infatti, indichiamo con $x-1$ il numero di cui dobbiamo calcolare il quadrato, abbiamo:

$$(x-1)^2 + 4 \cdot x = x^2 + 1 - 2\,x + 4\,x = x^2 + 1 + 2\,x$$

d'altra parte sappiamo anche che:

$$x^2 + 1 + 2\,x = (x+1)^2\ .$$

Il testo dell'esercizio può essere anche espresso nel modo seguente: "*dati tre numeri consecutivi, il quadrato del maggiore è uguale al quadruplo del medio più il quadrato del minore.*"

Esercizio 12. *Dimostrare che, sottraendo* 1 *al cubo di un numero naturale maggiore di* 2*, non è possibile ottenere mai un numero primo.*

Soluzione. Indichiamo il numero naturale con x; otteniamo l'espressione

$$x^3 - 1$$

dal momento che $1 = 1^3$, abbiamo:

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3$$

riferendoci alla formula della differenza dei cubi, otteniamo la seguente fattorizzazione:

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

dal momento che x è maggiore di 2, abbiamo che

$$x - 1 > 1 \quad ; \quad x^2 + x + 1 > 1\ ;$$

il numero $(x^3 - 1)$ non è quindi primo, in quanto i due fattori sono entrambi interi e maggiori di 1.

Esercizio 13. *Dimostrare che, sommando* 8 *al cubo di un numero naturale, non è possibile ottenere mai un numero primo.*

Soluzione. Indichiamo il numero naturale con x; otteniamo l'espressione

$$x^3 + 8$$

dal momento che $8 = 2^3$, abbiamo:

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3$$

riferendoci alla formula della somma dei cubi, otteniamo la seguente fattorizzazione:

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2\,x + 4)\ ;$$

abbiamo inoltre che

$$x + 2 > 1 \quad ; \quad x^2 - 2\,x + 4 > 1\ ;$$

il numero $x^3 + 8$ non può quindi essere un numero primo, in quanto i due fattori sono entrambi interi e maggiori di 1. $\square$

Esercizio 14. *Dimostra che la differenza dei quadrati di due numeri dispari consecutivi è uguale al quadruplo del numero pari compreso tra i due dispari.*

Soluzione. Indicando con $(2\,x+1)$ e $(2\,x-1)$ i due dispari consecutivi (questa scelta è migliore rispetto a $\{2\,x+3; 2\,x+1\}$) abbiamo:

$$(2\,x+1)^2-(2\,x-1)^2=4\,x^2+1+4\,x-\left(4\,x^2+1-4\,x\right)=8\,x$$

dobbiamo ora mettere in relazione il risultato ottenuto con il numero pari compreso tra i due numeri dispari (cioè $2\,x$):

$$8\,x=4\cdot(2\,x)$$

la dimostrazione è quindi completata. □

Se avessimo scelto di indicare con $(2\,x+3)$ il dispari maggiore (e quindi con $(2\,x+1)$ il dispari minore) avremmo ottenuto:

$$(2\,x+3)^2-(2\,x+1)^2=4\,x^2+9+12\,x-(4\,x^2+1+4\,x)=8\,x+8\;;$$

il risultato va messo in relazione con il numero pari compreso tra i due dispari, che in questo caso è $2\,x+2$:

$$8\,x+8=4\cdot(2\,x+2)\;;$$

la dimostrazione è completata anche in questo caso.

Esercizio 15. *Dimostra che la differenza tra il quadrato di un numero dispari e il quadrato del numero pari immediatamente precedente è uguale al doppio del numero pari* $+1$.

Soluzione. Conviene prendere $2\,x+1$ per indicare il numero dispari (e quindi $2\,x$ è il numero pari immediatamente precedente); sviluppiamo ora l'espressione indicata dal testo:

$$(2\,x+1)^2-(2\,x)^2=4\,x^2+1+4\,x-4\,x^2=4\,x+1\;;$$

dobbiamo a questo punto mettere in relazione il risultato con il numero pari:

$$4\,x+1=2\cdot(2\,x)+1$$

la dimostrazione è quindi completata. □

Esercizio 16. *Dimostra che la differenza dei cubi di due dispari consecutivi è uguale al sestuplo del quadrato del numero pari compreso tra i due dispari* $+2$.

Soluzione. Indichiamo con $(2\,x+1)$ e $(2\,x-1)$ i due dispari consecutivi; se calcoliamo la differenza dei cubi otteniamo:

$$(2\,x+1)^3-(2\,x-1)^3=8\,x^3+12\,x^2+6\,x+1-(8\,x^3-12\,x^2+6\,x-1)=24\,x^2+2\;;$$

scriviamo ora il sestuplo del quadrato del numero pari compreso tra i due dispari + 2:

$$6\cdot(2\,x)^2+2=6\cdot(4\,x^2)+2=24\,x^2+2\;;$$

questo dimostra ciò che volevamo. □

Con la scelta $\{2\,x+3; 2\,x+1\}$ i calcoli sono più laboriosi.

Esercizio 17. *Dimostrare che i numeri del tipo a^4+4, con a intero maggiore di 1, non sono primi. Questo fatto è noto in matematica come Teorema di Sofia Germain.*

Soluzione. Il polinomio a^4+4 non ha ovviamente radici, dal momento che è somma di due quantità non negative. E' possibile, però, sommare e togliere al polinomio la quantità $4\,a^2$:

$$a^4+4=a^4+4+4\,a^2-4\,a^2$$

osserviamo che i primi tre termini costituiscono il quadrato di un binomio:

$$a^4+4+4\,a^2=\left(a^2+2\right)^2$$

e quindi possiamo scrivere:

$$a^4+4=a^4+4+4\,a^2-4\,a^2=\left(a^2+2\right)^2-4\,a^2$$

osservando che $4\,a^2=\left(2\,a\right)^2$ ricaviamo:

$$\left(a^2+2\right)^2-4\,a^2=\left(a^2+2\right)^2-\left(2\,a\right)^2$$

si riconosce ora la differenza di due quadrati, per cui è possibile scrivere la seguente fattorizzazione:

$$\left(a^2+2\right)^2-\left(2\,a\right)^2=(a^2+2-2\,a)(a^2+2+2\,a)$$

e quindi:

$$a^4+4=(a^2+2-2\,a)(a^2+2+2\,a)$$

si osservi che i due fattori a destra sono entrambi maggiori di 1 (si ricordi che a è maggiore di 1). $\square$

Esercizio 18. *Dimostrare che, sommando i cubi di due numeri dispari consecutivi e sottraendo al risultato il quadrato del numero compreso tra i due dispari, si ottiene un multiplo di 4.*

Soluzione. Indichiamo con $(2\,x+1)$ il numero dispari maggiore (il minore sarà ovviamente $2\,x-1$); il numero pari compreso tra essi è $2\,x$. Svolgendo l'espressione indicata dall'esercizio abbiamo:

$$(2\,x+1)^3+(2\,x-1)^3-(2\,x)^2=16\,x^3-4\,x^2+12\,x$$

i tre termini finali sono tutti multipli di 4, perciò possiamo scrivere:

$$16\,x^3-4\,x^2+12\,x=4\cdot\left(4\,x^3-x^2+3\,x\right)$$

ciò indica che il numero ottenuto è multiplo di 4. $\square$

Esercizio 19. *Dimostrare che il doppio della somma dei quadrati di due numeri è uguale al quadrato della loro somma sommato al quadrato della loro differenza.*

Soluzione. Indichiamo con x e y i due numeri; svolgiamo il doppio della somma dei quadrati dei due numeri:

$$2\left(x^2+y^2\right)=2\,x^2+2\,y^2 \tag{4}$$

scriviamo ora il quadrato della loro somma sommato al quadrato della loro differenza:

$$(x+y)^2+(x-y)^2=x^2+y^2+2\,xy+x^2+y^2-2\,xy=2\,x^2+2\,y^2 \tag{5}$$

le espressioni (4) e (5) sono identiche, quindi la dimostrazione è completata. $\square$

Esercizio 20. *Dimostrare che*

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\ . \tag{6}$$

Utilizzare questa uguaglianza per scrivere sotto forma di somma di sue quadrati i prodotti

$$13\cdot 41 \quad ; \quad 82\cdot 50 \quad ; \quad 52\cdot 34 \quad ; \quad 53\cdot 41\ .$$

Soluzione. Per dimostrare l'uguaglianza è sufficiente svolgere le due espressioni e verificare che coincidono:

$$\begin{aligned}(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 &= a^2c^2+b^2d^2+2abcd+a^2d^2+b^2c^2-2abcd=\\ &=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \end{aligned}\tag{7}$$

d'altra parte abbiamo:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \tag{8}$$

le due espressioni (7) e (8) coincidono. □

Per quanto riguarda i prodotti scritti abbiamo:

$$13\cdot 41=(9+4)\cdot(25+16)=(3^2+2^2)\cdot(5^2+4^2)=(3\cdot 5+2\cdot 4)^2+(3\cdot 4-2\cdot 5)^2=23^2+2^2$$

per gli altri prodotti si ragiona in modo analogo.

Osservazione. Utilizzando il calcolo vettoriale possiamo dare un'altra dimostrazione dell'uguaglianza (6); prendiamo in considerazione due vettori v_1, v_2 di $\mathbb{R}^3$ appartenenti al piano di equazione cartesiana $z=0$:

$$v_1=\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}\ ;\ v_2=\begin{bmatrix}c\\d\\0\end{bmatrix}\ ;$$

calcoliamo il prodotto scalare e il prodotto vettoriale dei due vettori:

$$v_1\cdot v_2=\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c\\d\\0\end{bmatrix}=ac+bd \quad ; \quad v_1\wedge v_2=\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}c\\d\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ad-bc\end{bmatrix}\ ;$$

d'altra parte risulta (β è l'angolo compreso tra i due vettori):

$$\begin{cases}|v_1\cdot v_2|=\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdot|\cos\beta|\\ \|v_1\wedge v_2\|=\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdot|\sin\beta|\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \|v_1\|^2\cdot\|v_2\|^2=(v_1\cdot v_2)^2+\|v_1\wedge v_2\|^2$$

sostituendo nella precedente

$$\|v_1\|^2=a^2+b^2 \quad ; \quad \|v_2\|^2=c^2+d^2$$

$$(v_1\cdot v_2)^2=(ac+bd)^2 \quad ; \quad \|v_1\wedge v_2\|^2=(ad-bc)^2$$

otteniamo proprio la (6). □