

Esercizi di approfondimento sulla geometria dello spazio

4^aC Scientifico 18/03/2022

Esercizio 1. Determinare l'equazione cartesiana della sfera Γ passante per i punti $P_1(2, 2, 2)$, $P_2(0, 1, 3)$, $P_3(2, 3, 1)$, $P_4(2, 0, -2)$. [R. $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0$.]

Esercizio 2. Si determini il luogo geometrico dei centri delle sfere tangenti alla retta $s : \begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases}$ nell'origine. [R. \mathcal{L} è il **piano** di equazione $x + y - z = 0$]

Esercizio 3. Si determini il luogo geometrico dei centri delle sfere aventi raggio 2 e tangenti alla retta $s : \begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases}$ nell'origine. [R. $\mathcal{L} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$; \mathcal{L} è la **circonferenza** del piano $x + y - z = 0$, di centro O e raggio 2.]

Esercizio 4. Si determini il luogo geometrico dei centri delle sfere aventi raggio 2 e tangenti alla retta $s : \begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases}$. [R. \mathcal{L} è il **cilindro circolare** di asse s e raggio 2; la sua equazione è $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 6 = 0$.]

Esercizio 5. Determinare i due piani che contengono la retta $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e sono tangenti alla sfera $\Gamma : 26x^2 + 26y^2 + 26z^2 - 52x - 104y + 129 = 0$. [R. $\alpha : 4x - 3y - z + 1 = 0$, $\beta : 24x - 7y + 5z - 5 = 0$.]

Esercizio 6. Determinare i due piani che contengono la retta $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e che intersecano la sfera $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 10z = 0$ in una circonferenza di raggio $r = \sqrt{17}$. [R. $\alpha : y - z + 1 = 0$, $\beta : 8x - 3y - 5z - 3 = 0$]

Esercizio 7. Determinare il luogo geometrico dei centri delle sfere di raggio 5 che intersecano il piano $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$ in una circonferenza di raggio $r = 4$. [R. \mathcal{L} è l'**unione dei due piani paralleli** $\alpha : x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\beta : x - 2y + 2z - 13 = 0$]

Esercizio 8. Determinare il luogo geometrico dei centri delle sfere di raggio 5 che staccano sulla retta $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

una corda di lunghezza $\ell = 6$.

[R. \mathcal{L} è il **cilindro circolare** di asse s e raggio 4; la sua equazione è $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$]

Esercizio 9. Determinare i valori di λ in modo che il luogo dei punti comuni alle sfere $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + \lambda = 0$ e $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z = 0$ sia una circonferenza reale non degenera. [R. $-22 - 2\sqrt{170} < \lambda < -22 + 2\sqrt{170}$]

Esercizio 10. Determinare il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti dal piano $\alpha : x + 2y + 2z - 1 = 0$ e dalla retta s passante per il punto $A(6, 0, -3)$ e parallela ai piani α e $\beta : x + 2y + 1 = 0$. [R. $\mathcal{L} : 4x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 16xy - 20xz - 40yz - 98x - 196y + 290z + 724 = 0$; \mathcal{L} è un **cilindro parabolico**.]