Liceo “E. Fermi” Cecina - Prof. Francesco Daddi

Svolgimento degli esercizi sui luoghi geometrici nello spazio

4^aC Scientifico 17/03/2022

Esercizio 1. Assegnati i punti $A = (0, 0, 1)$, $B = (-2, 4, 3)$ Determinare il luogo geometrico dei punti P dello spazio tali che $d(P, A) = 2 \cdot d(P, B)$.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4\left((x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2\right)$$

da cui

$$3\,x^2 + 3\,y^2 + 3\,z^2 + 16\,x - 32\,y - 22\,z + 115 = 0.$$

Il luogo è la **sfera** di centro $C\left(-\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{16}{3}\,;\,\dfrac{11}{3}\right)$ e raggio $r = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Esercizio 2. Assegnato il piano $\pi : x - 3\,y + 2\,z = 3$, si determini il luogo geometrico dei punti P dello spazio la cui proiezione ortogonale su π è il punto $H = (1, 0, 1)$.

Soluzione. Il luogo richiesto è la **retta** r passante per H e ortogonale a π:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Assegnato il piano $\pi : 2\,x - y - 2\,z = 3$, si determini il luogo geometrico dei punti P dello spazio tali che $d(P, \pi) = 4$.

Soluzione.

$$\frac{\left|2\,x - y - 2\,z - 3\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \left|2\,x - y - 2\,z - 3\right| = 12$$

quindi il luogo richiesto è l’**unione dei due piani paralleli**

$$\pi_1 : 2\,x - y - 2\,z - 15 = 0\ ; \qquad \pi_2 : 2\,x - y - 2\,z + 9 = 0.$$

Esercizio 4. Assegnati i punti $A = (0, 0, 1)$, $B = (-2, 4, 3)$, $C = (4, -2, 1)$, si determini il luogo geometrico dei punti P dello spazio tali che $d(P, A) = d(P, B) = d(P, C)$.

Soluzione. Il luogo richiesto è l’intersezione dei piani assiali dei segmenti AB e AC:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

da cui si ricava la **retta**

$$\begin{cases} x - 2\,y - z + 7 = 0 \\ 2\,x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere nella forma parametrica

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\,\lambda - 5 \\ z = 17 - 3\,\lambda\,. \end{cases}$$

Esercizio 5. Si determini il luogo geometrico dei punti P dello spazio che sono equidistanti dall'origine e dall'asse z.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 \qquad \Rightarrow \qquad z^2 = 0$$

il luogo richiesto è costituito dal **piano** $z = 0$.

Esercizio 6. Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti P dello spazio la cui distanza dall'asse z è doppia rispetto alla distanza dall'origine.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 = 4 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$$

da cui

$$3\,x^2 + 3\,y^2 + 4\,z^2 = 0.$$

Il luogo richiesto è costituito da **un solo punto** (l'origine).

Esercizio 7. Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti P dello spazio che sono equidistanti dall'origine e dalla retta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

da cui

$$2\,x + 4\,y + z^2 - 5 = 0.$$

Il luogo richiesto è un **cilindro parabolico.**

Esercizio 8. Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti P dello spazio che sono equidistanti dall'origine e dal piano $\pi : x + 2\,y + 2\,z = 5$.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 + z^2 \;=\; \frac{\left(x + 2\,y + 2\,z - 5\right)^2}{1^2 + 2^2 + 2^2}$$

da cui

$$8\,x^2 + 5\,y^2 + 5\,z^2 - 4\,x\,y - 4\,x\,z - 8\,y\,z + 10\,x + 20\,y + 20\,z - 25 = 0$$

Il luogo richiesto è un **paraboloide circolare.**

Esercizio 9. Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti P dello spazio che sono equidistanti dall'asse z e dal piano $\pi : x + 2\,y + 2\,z = 5$.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 \;=\; \frac{\left(x + 2\,y + 2\,z - 5\right)^2}{1^2 + 2^2 + 2^2}$$

da cui

$$8\,x^2 + 5\,y^2 - 4\,z^2 - 4\,x\,y - 4\,x\,z - 8\,y\,z + 10\,x + 20\,y + 20\,z - 25 = 0.$$

Il luogo richiesto è un **cono a due falde.**

Esercizio 10. Si determini il luogo geometrico dei punti P dello spazio che sono equidistanti dall'asse z e dalla retta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 \; = \; (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

da cui

$$2\,x + 4\,y - 5 = 0.$$

Il luogo richiesto è quindi il **piano** di equazione $2\,x + 4\,y - 5 = 0$.

Esercizio 11. ♡ Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti P dello spazio che sono equidistanti dall'asse z e dalla retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

Soluzione. Indicato con $P(a, b, c)$ il generico punto del luogo geometrico richiesto, la sua proiezione ortogonale H sulla retta r si ottiene intersecando r con il piano π passante per P e ortogonale a r:

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \\ x + y + z = a + b + c \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a+b+c}{3} \\[2ex] y = \dfrac{a+b+c}{3} \\[2ex] z = \dfrac{a+b+c}{3} \end{cases}$$

quindi risulta $H\left(\dfrac{a+b+c}{3}, \dfrac{a+b+c}{3}, \dfrac{a+b+c}{3}\right)$. A questo punto imponiamo che la distanza di $P(a, b, c)$ dall'asse z sia uguale alla distanza di P dal punto H:

$$a^2 + b^2 \; = \; \left(a - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 + \left(c - \frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

da cui ricaviamo l'equazione

$$a^2 + b^2 - 2\,c^2 + 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,b\,c = 0$$

che possiamo riscrivere nella forma equivalente

$$(a + b + c)^2 - 3\,c^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \big(a + b + c + \sqrt{3}\,c\big)\big(a + b + c - \sqrt{3}\,c\big) = 0.$$

Il luogo richiesto è l'**unione dei due piani incidenti**

$$\pi_1 : x + y + z + \sqrt{3}\,z = 0 \;\; ; \qquad \pi_2 : x + y + z - \sqrt{3}\,z = 0\,.$$

Esercizio 12. ♡ Assegnata la retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = 1 - z \end{cases}$ si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti P dello spazio tali che $d(P, r) = 2$.

Soluzione. Indicato con $P(a, b, c)$ il generico punto del luogo geometrico richiesto, la sua proiezione ortogonale H sulla retta r si ottiene intersecando r con il piano π passante per P e ortogonale a r:

$$\begin{cases} x = y \\ y = 1 - z \\ x + y - z = a + b - c \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a+b-c+1}{3} \\[2ex] y = \dfrac{a+b-c+1}{3} \\[2ex] z = \dfrac{2-a-b+c}{3} \end{cases}$$

quindi risulta $H\left(\frac{a+b-c+1}{3}\,,\,\frac{a+b-c+1}{3}\,,\,\frac{2-a-b+c}{3}\right)$. A questo punto imponiamo che la distanza di P dalla sua proiezione H su r sia uguale a 2:

$$\left(a-\frac{a+b-c+1}{3}\right)^2+\left(b-\frac{a+b-c+1}{3}\right)^2+\left(c-\frac{2-a-b+c}{3}\right)^2 = 4$$

da cui si ricava l'equazione

$$a^2+b^2+c^2-a\,b+a\,c+b\,c-a-b-2\,c-5=0.$$

Il luogo richiesto è il **cilindro circolare** di equazione cartesiana

$$x^2+y^2+z^2-x\,y+x\,z+y\,z-x-y-2\,z-5=0.$$