Strategie a confronto nella probabilità

FRANCESCO DADDI

6 MAGGIO 2022

Qualche riflessione iniziale

- Esistono varie strategie, in generale, per risolvere un problema di probabilità
- I metodi «forza bruta» sono limitati; funzionano bene se il problema è semplice e se i numeri in gioco sono *piccoli*; possono dare delle idee per possibili generalizzazioni, ma…
- È opportuno individuare strategie più sofisticate e quindi più «potenti», in grado di aggredire il problema da un’altra prospettiva, utilizzabili poi in altri contesti.

Problema dei gruppi

Date 32 persone si vogliono creare, mediante estrazione, 4 gruppi (A, B, C, D) costituiti ciascuno da 8 persone. Alba e Bernardo vorrebbero stare nello stesso gruppo.

Qual è la probabilità che finiscano **nello stesso gruppo**?

Prima soluzione

Casi possibili: $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}$

Casi favorevoli:

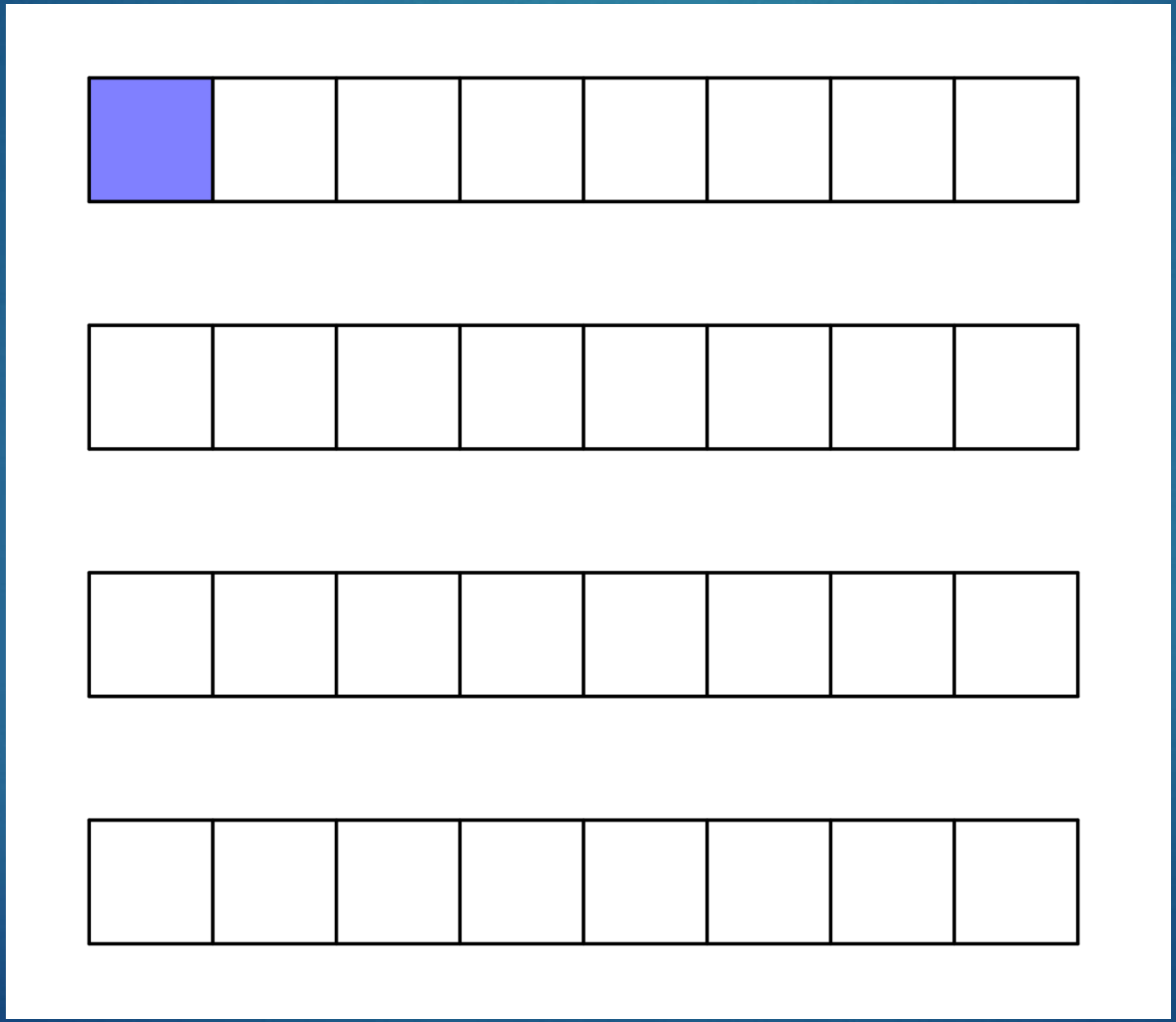
$$\binom{2}{2}\binom{30}{6}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}+\binom{32}{8}\binom{2}{2}\binom{22}{6}\binom{16}{8}\binom{8}{8}+$$

$$+\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{2}{2}\binom{14}{6}\binom{8}{8}+\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{2}{2}\binom{6}{6}$$

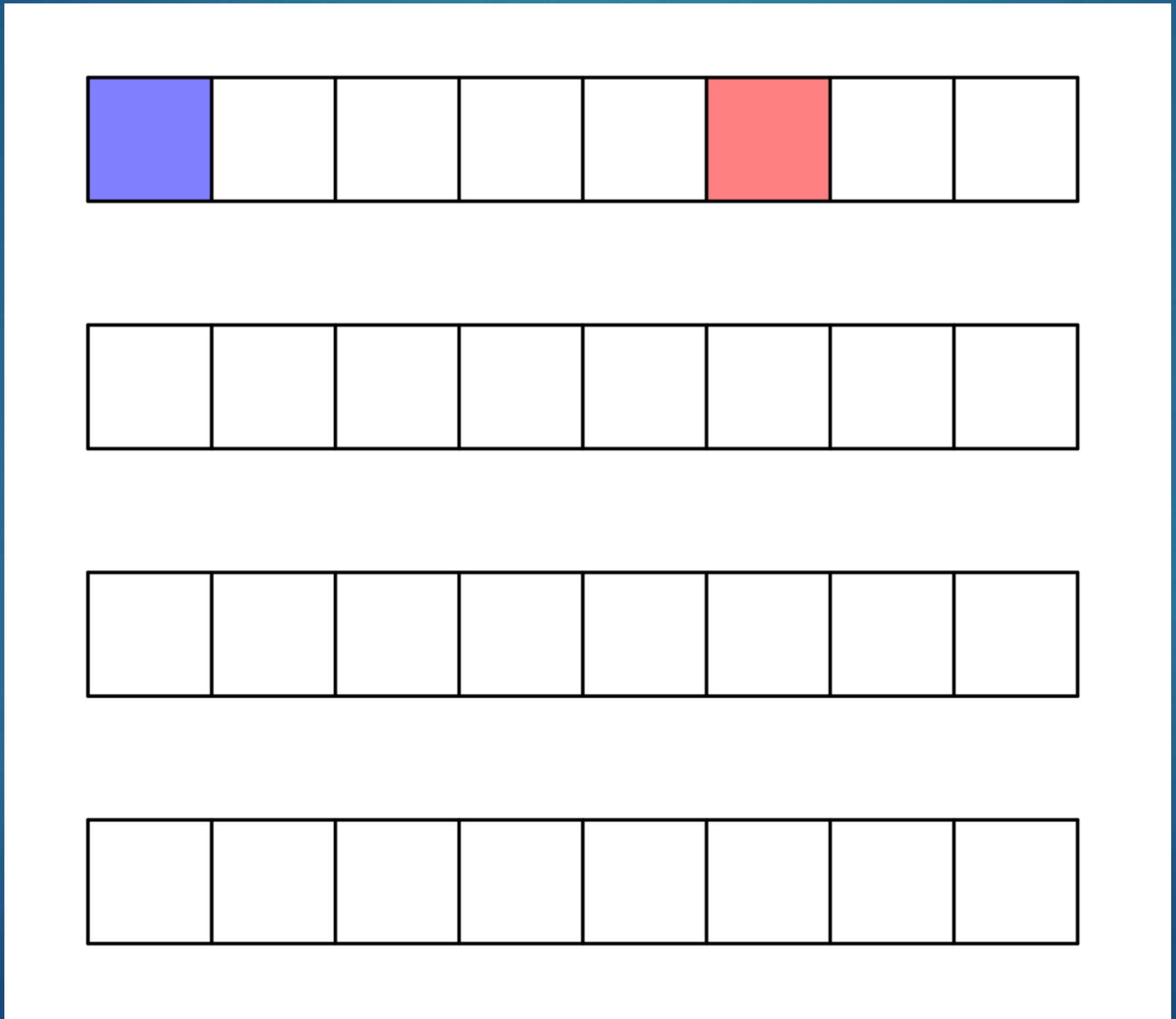
La probabilità è $P=\frac{7}{31}$

Seconda soluzione

Alba occupa uno dei posti



Bernardo deve occupare uno qualsiasi dei 7 posti rimanenti del gruppo al quale appartiene Alba. La probabilità è quindi 7/31.



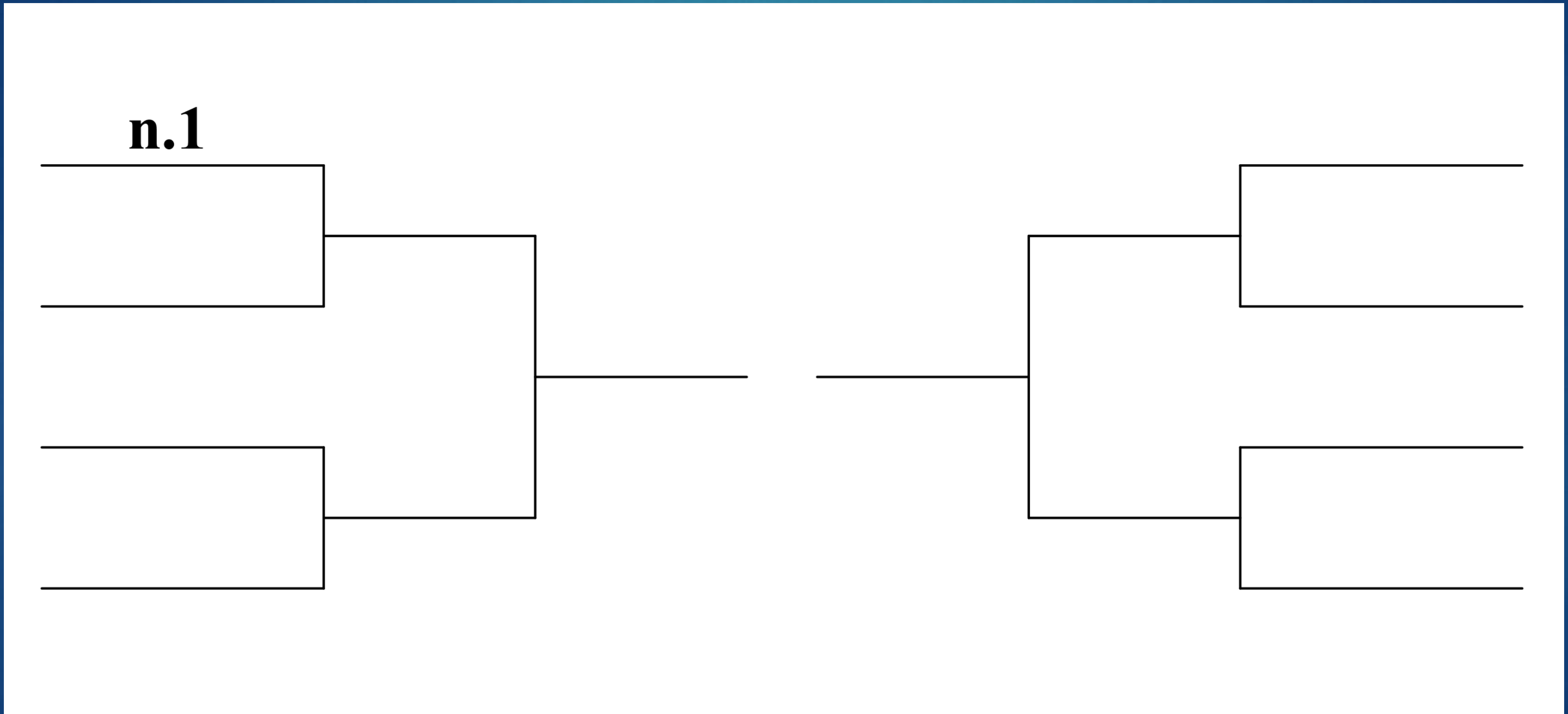
Chi arriva in finale?

Ad un torneo ad eliminazione diretta partecipano 8 giocatori; il tabellone viene formato in modo totalmente casuale, **senza teste di serie**.

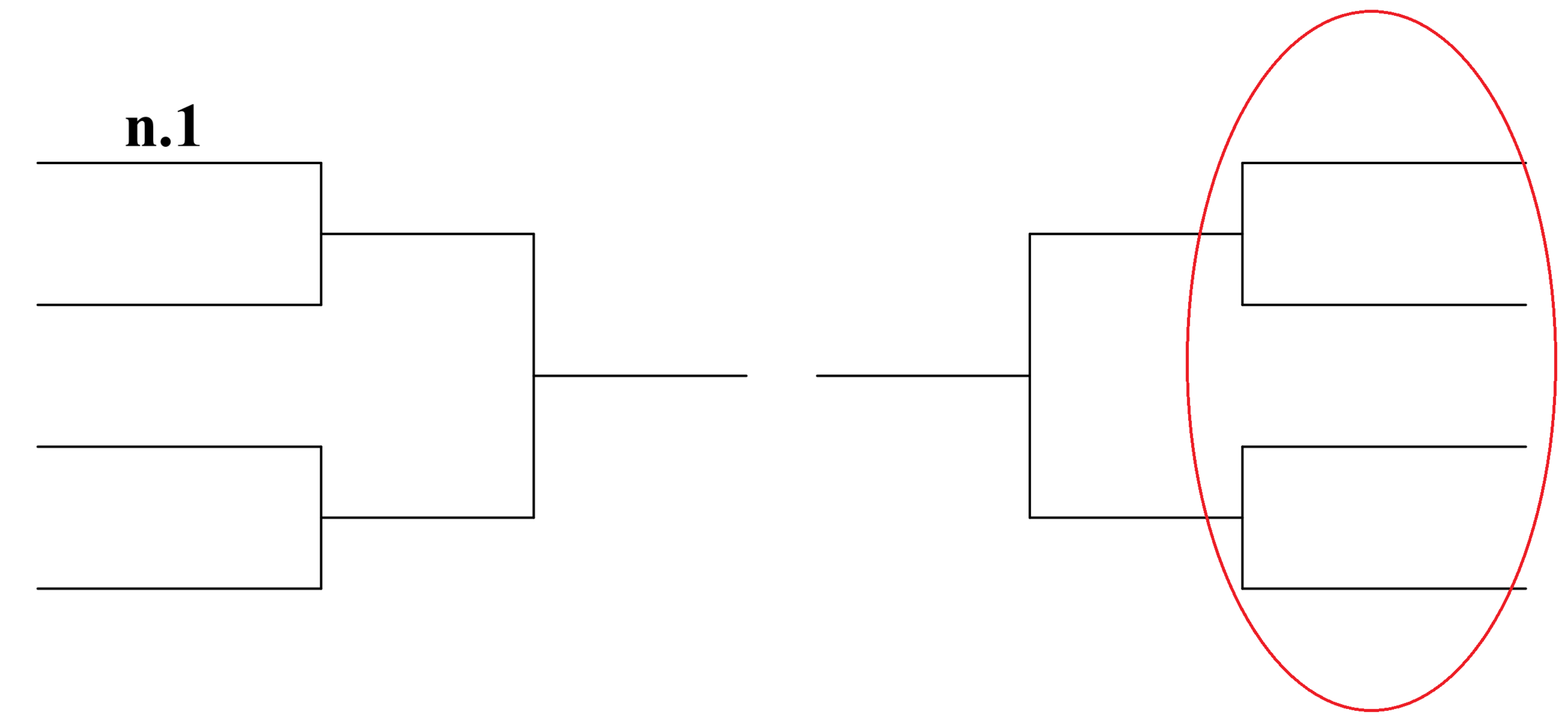
Supponiamo che le abilità siano ordinate (senza ex aequo) e che ogni partita sia vinta dal giocatore più forte sulla carta (il n.k batte coloro che hanno un numero > k).

Qual è la probabilità che **il <u>n.2</u> arrivi in finale**?

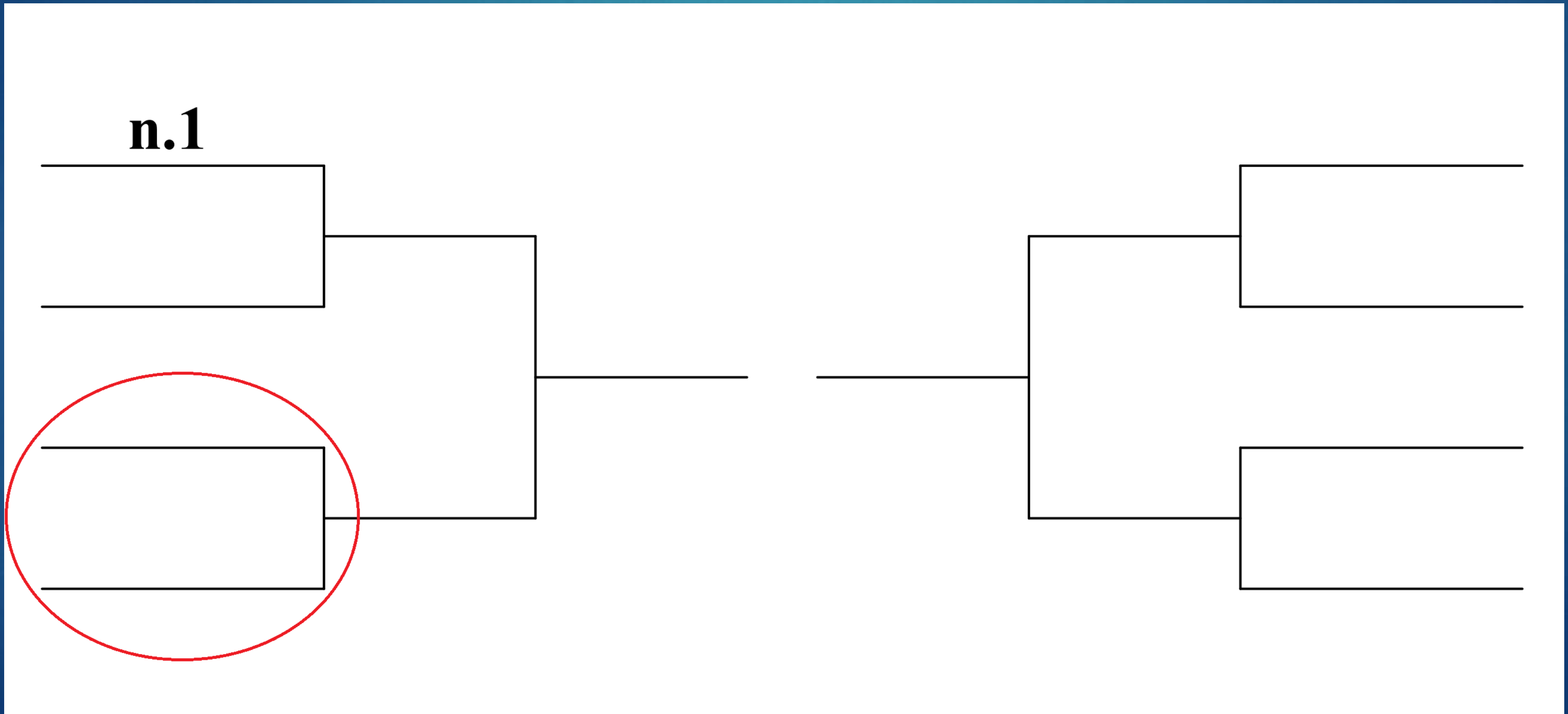
Vediamo la situazione…



Ci sono **4 casi favorevoli su 7**



Qual è la probabilità che il n.2 si fermi in **<u>semifinale</u>**? Stavolta ci sono **2 casi favorevoli su 7.**



Un problema geometrico

Assegnato un **poligono regolare con 2n lati**, se ne scelgono a caso 3 vertici distinti.

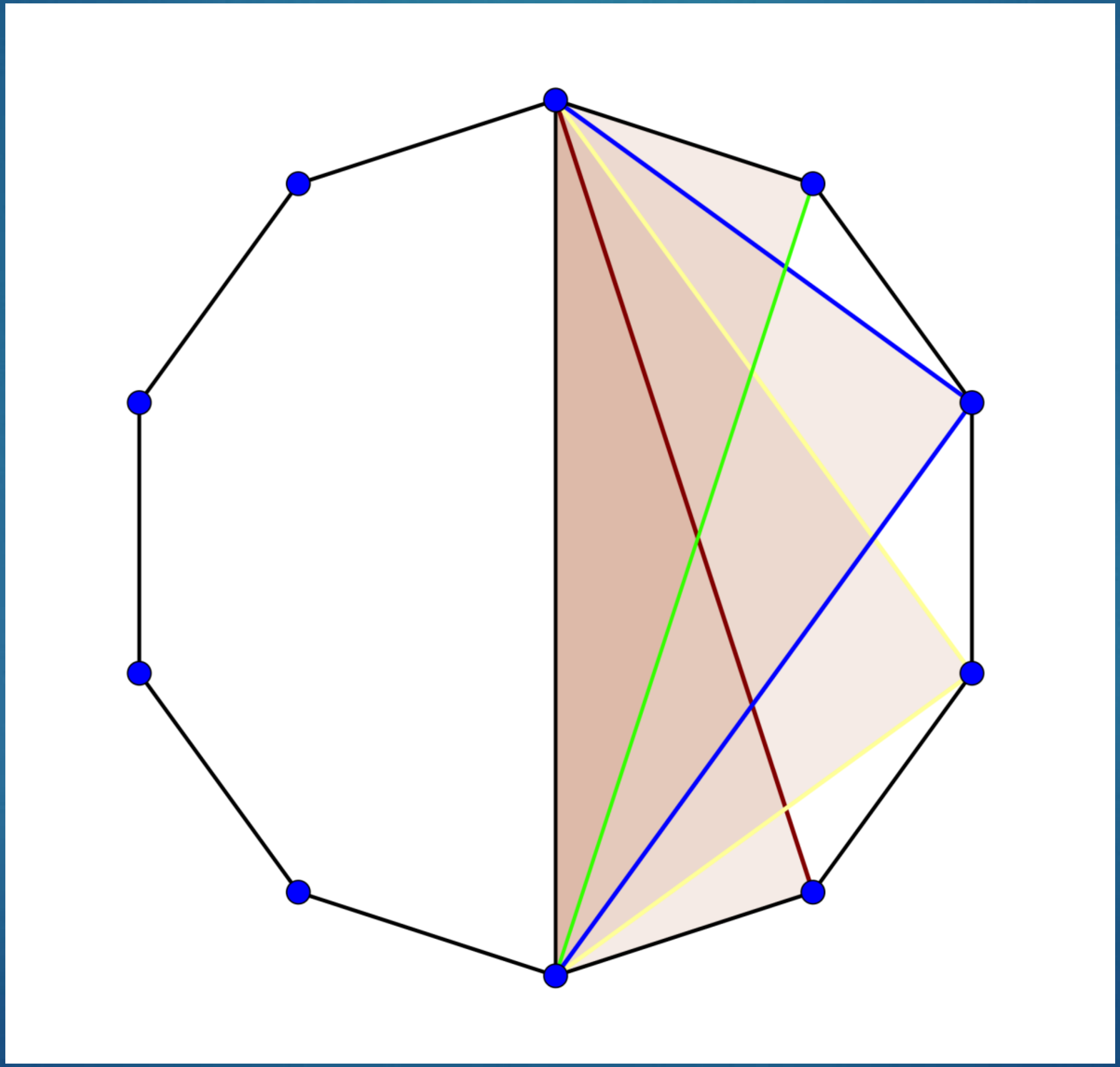
Qual è la probabilità che i tre punti scelti siano i vertici di un **triangolo rettangolo**?

Prima soluzione

Tecnica «Casi favorevoli su casi possibili».

Ci sono n diagonali che passano per il centro di simmetria del poligono. Fissata una di queste diagonali, esiste un triangolo rettangolo per ognuno dei $(2n-2)$ vertici che non appartengono a tale diagonale.

In figura sono rappresentati **solo** i triangoli rettangoli a destra della diagonale.



Il numero dei triangoli rettangoli è uguale a

$$n\,(2n-2)=2n^2-2n.$$

La probabilità richiesta è uguale a

$$P=\frac{2n^2-2n}{\binom{2n}{3}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$$

Seconda soluzione

- Il primo vertice è scelto con probabilità $\frac{2n}{2n} = 1$;
- il secondo vertice può essere **<u>il vertice diametralmente opposto</u>** al primo (con prob. $\frac{1}{2n-1}$) oppure no (con prob. $\frac{2n-2}{2n-1}$);

nel primo caso abbiamo la garanzia che il terzo vertice vada bene, mentre nel secondo caso si ha una probabilità $\frac{2}{2n-2}$ di scegliere un vertice opposto al primo oppure al secondo vertice.

$$P = \frac{2n}{2n} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-2} + \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2}{2n-2} \right) = \boldsymbol{\frac{3}{2n-1}}$$

Terza soluzione

Calcoliamo la probabilità Q che i tre vertici **non** formino un triangolo rettangolo.

Scelto il primo vertice, il **secondo** non deve essere quello diametralmente opposto (ciò accade con probabilità $\frac{2n-2}{2n-1}$), mentre il **terzo** vertice non deve essere diametralmente opposto né al primo né al secondo (ciò accade con prob. $\frac{2n-4}{2n-2}$). Risulta

$$Q = \frac{2n}{2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-2} = \frac{2n-4}{2n-1}$$

$$\rightarrow \qquad P = 1 - Q = 1 - \frac{2n-4}{2n-1} = \boldsymbol{\frac{3}{2n-1}}$$

Ruolo della simmetria

Stamattina il professore di matematica deve interrogare un solo studente: lo sceglie a caso lanciando un dado regolare a 30 facce e chiamando lo studente corrispondente (facendo riferimento all'ordine nel registro di classe). La classe è composta da 20 studenti e **oggi sono tutti presenti**. Ogni volta che il numero uscito non corrisponde ad alcun studente, il professore lancia nuovamente il dado, <u>**fermandosi solo quando il numero è associato a uno studente**</u>**.**

Pierino è uno dei 20 studenti della classe: **qual è la probabilità che stamattina esca proprio il suo numero <u>entro 9 lanci del dado</u>?**

Prima soluzione

Ci sono **9 casi** da analizzare:

- Pierino viene chiamato al **primo** lancio;
- Pierino viene chiamato al **secondo** lancio;
- …
- Pierino viene chiamato al **nono** lancio.

Sommando le rispettive probabilità si ricava:

$$P=\frac{1}{30}+\frac{10}{30}\cdot\frac{1}{30}+\left(\frac{10}{30}\right)^2\cdot\frac{1}{30}+\cdots+\left(\frac{10}{30}\right)^8\cdot\frac{1}{30}=\frac{\mathbf{9841}}{\mathbf{196830}}$$

Seconda soluzione

Si osserva prima di tutto che entro 9 lanci del dado deve uscire un numero ≤ 20; a questo punto, per simmetria, basta dividere per 20 e si ottiene la probabilità che venga chiamato proprio Pierino (che può infatti essere interrogato con la stessa probabilità di qualsiasi altro compagno di classe).

$$P = \frac{1}{20} \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{30}\right)^9\right) = \frac{\mathbf{9841}}{\mathbf{196830}}$$

Problema dei due numeri consecutivi

Una scatola contiene 8 palline, numerate da 1 a 8. Vengono estratte **in blocco** due palline. Qual è la probabilità che i due numeri siano **consecutivi**?

Prima soluzione

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) (6,7) (7,8)

Ci sono $\binom{8}{2} = 28$ possibili estrazioni, quindi la probabilità richiesta è

$$p = \frac{7}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{4}$$

In generale i casi favorevoli sono

$$(1,2) \quad (2,3) \quad (3,4) \quad \ldots \quad (n-2, n-1) \quad (n-1, n)$$

mentre i casi possibili sono $\binom{n}{2}$. La probabilità richiesta è

$$\boldsymbol{p = \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = (n-1)\cdot\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n}}$$

Seconda soluzione

Supponiamo che le due palline siano estratte **una dopo l'altra**. Se la prima pallina estratta è la n.1 oppure la n.8, per la seconda estrazione abbiamo un solo caso favorevole. Negli altri casi abbiamo due casi favorevoli.

La probabilità è

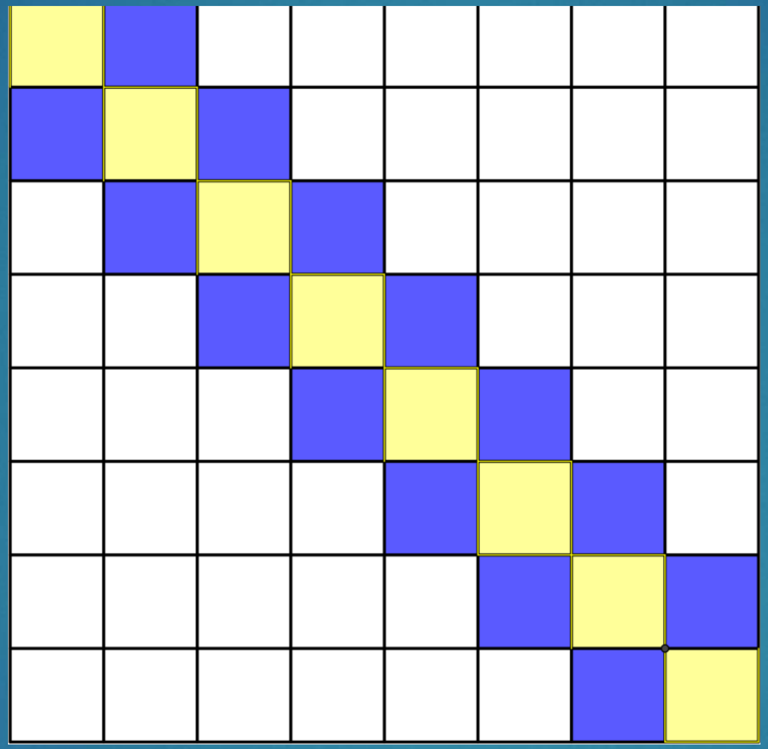
$$\boldsymbol{p = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{4}}$$

In generale (se la scatola contiene n palline):

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{2}{n}}$$

Terza soluzione

Ogni estrazione può essere associata a una casella…



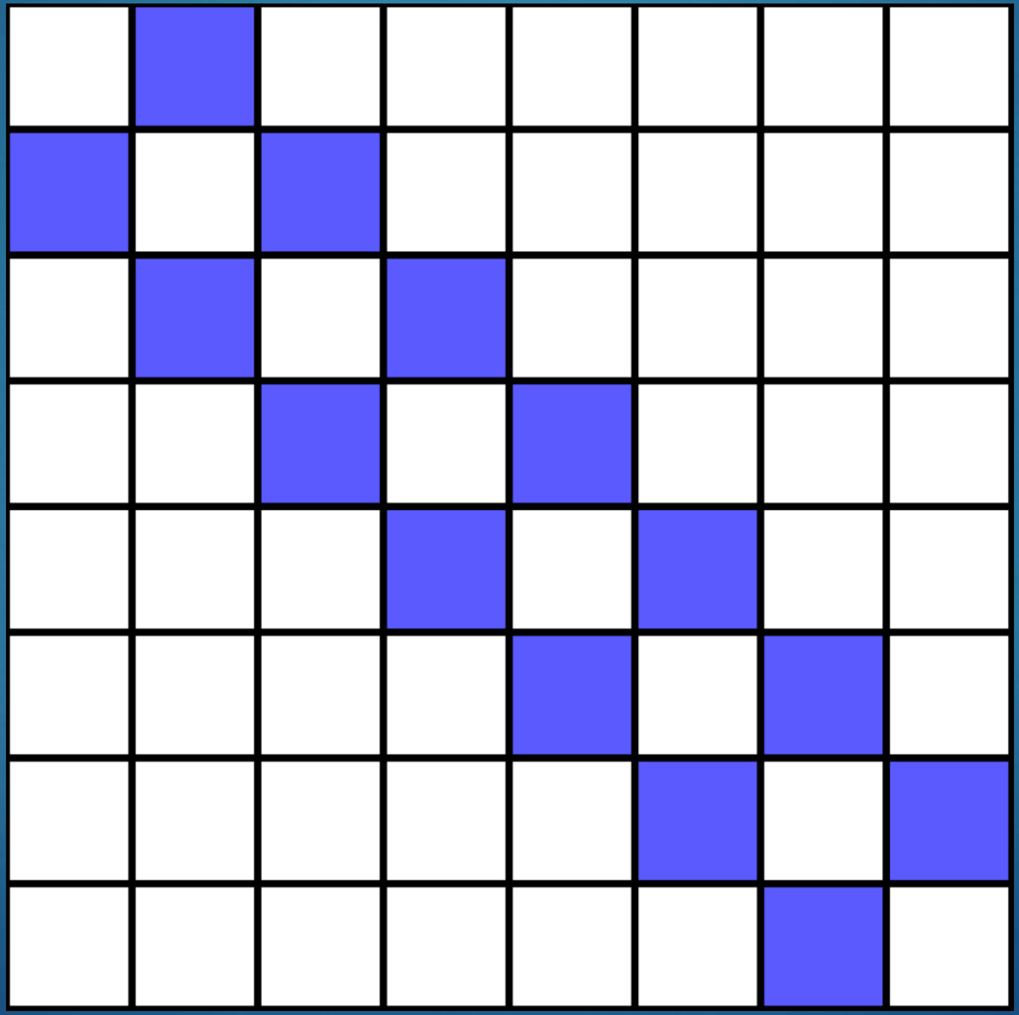
$$p = \frac{14}{64 - 8} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}};\qquad p = \frac{2 \cdot (n - 1)}{n^2 - n} = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}$$

Variante - con reinserimento

Cosa cambia se l’estrazione viene fatta CON reinserimento della prima pallina estratta?

Il metodo della tabella risulta immediato…

Stavolta dobbiamo considerare anche la diagonale: $p = \frac{14}{64} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{32}} \approx 0{,}219$. In generale $p = \frac{2(n-1)}{n^2} = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}} - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n^2}}$



Problema dei due tavoli

Quattro coppie sposate si siedono a 2 diversi tavoli. Ciascun tavolo ha 4 posti e le persone scelgono totalmente a caso.

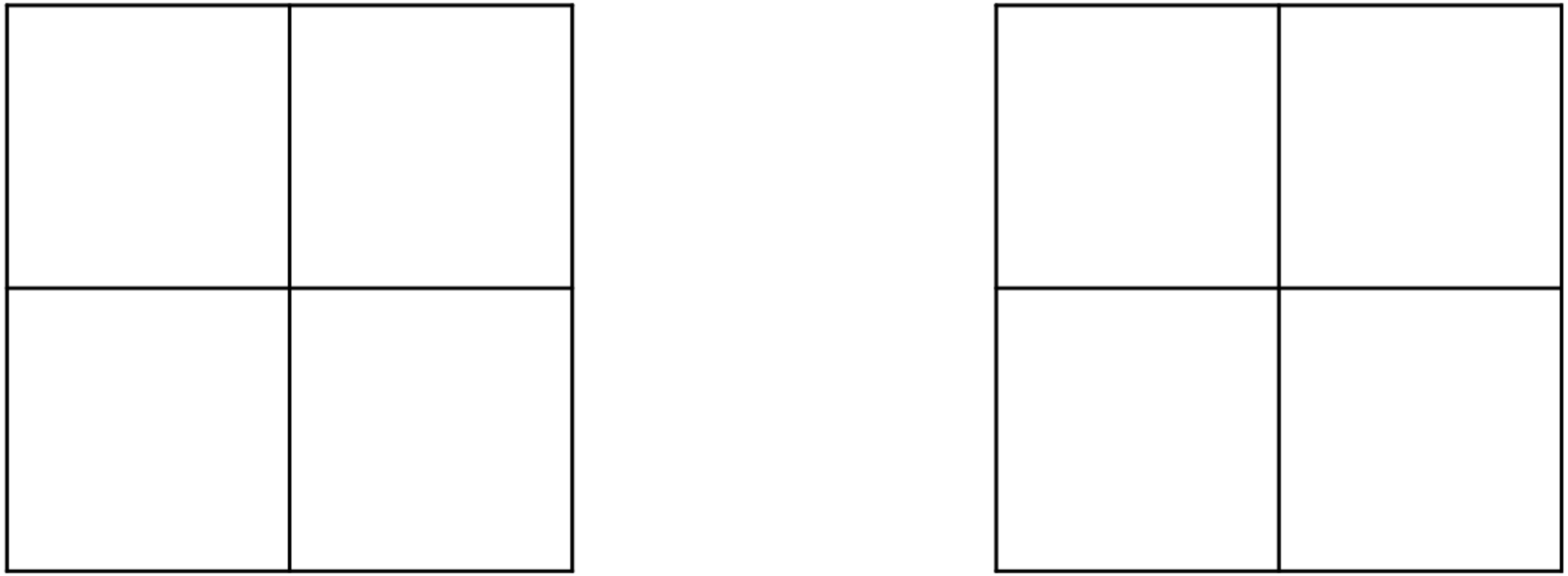
Qual è la probabilità che ci siano **solo due coppie insieme**?

Prima soluzione

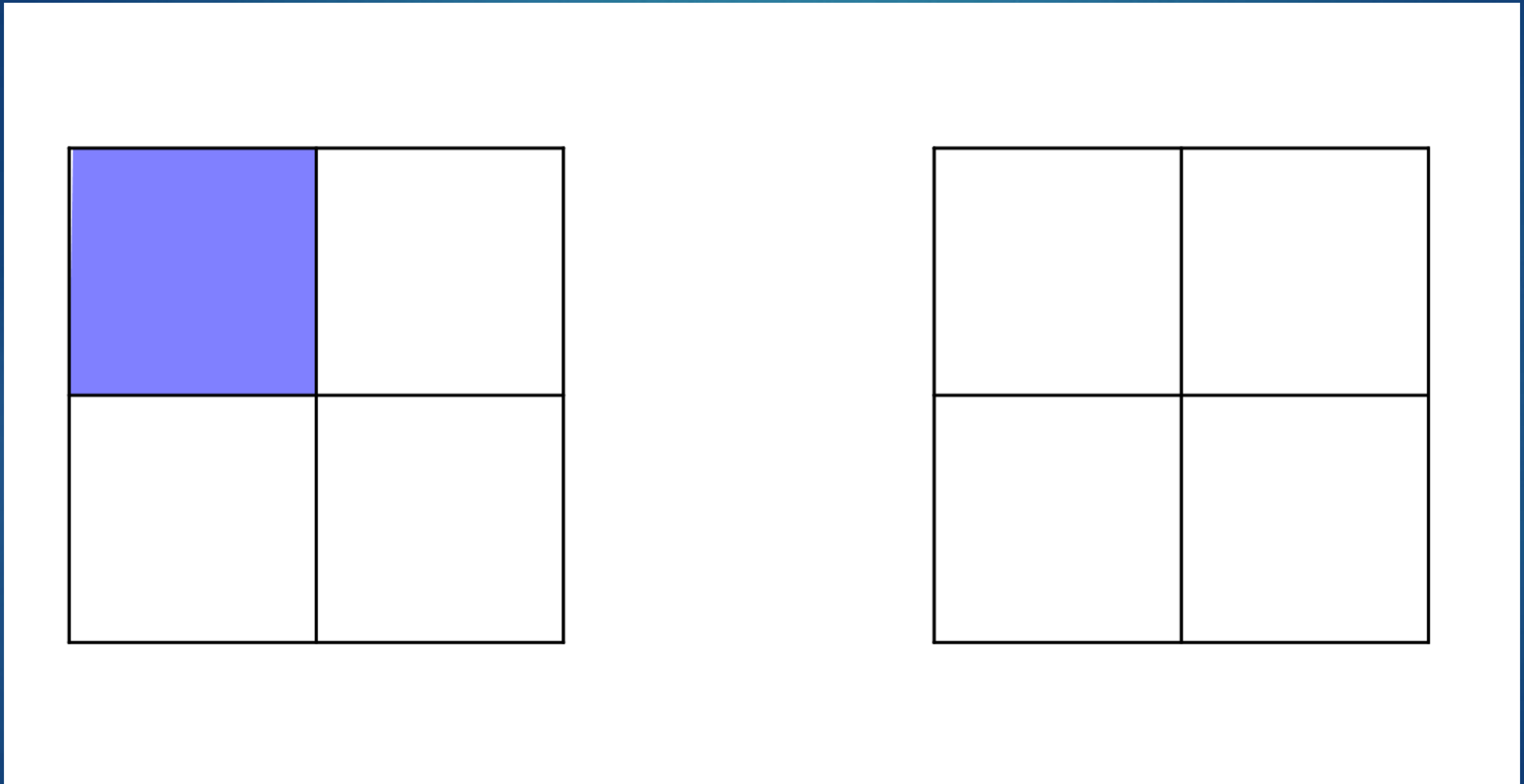
Ci sono $\binom{4}{2} = 6$ modi diversi di scegliere le due coppie che staranno **<u>insieme</u>** e, per ognuno di essi, immaginiamo di metterle in fila (marito-moglie di una delle due coppie selezionate, marito-moglie dell'altra coppia selezionata, marito-moglie di una delle due coppie rimanenti che saranno divisi in due tavoli distinti).

La probabilità richiesta si ottiene osservando che il marito della prima coppia sceglie il posto che vuole, sua moglie ha 3 casi favorevoli su 7 (deve stare nello stesso tavolo del marito).

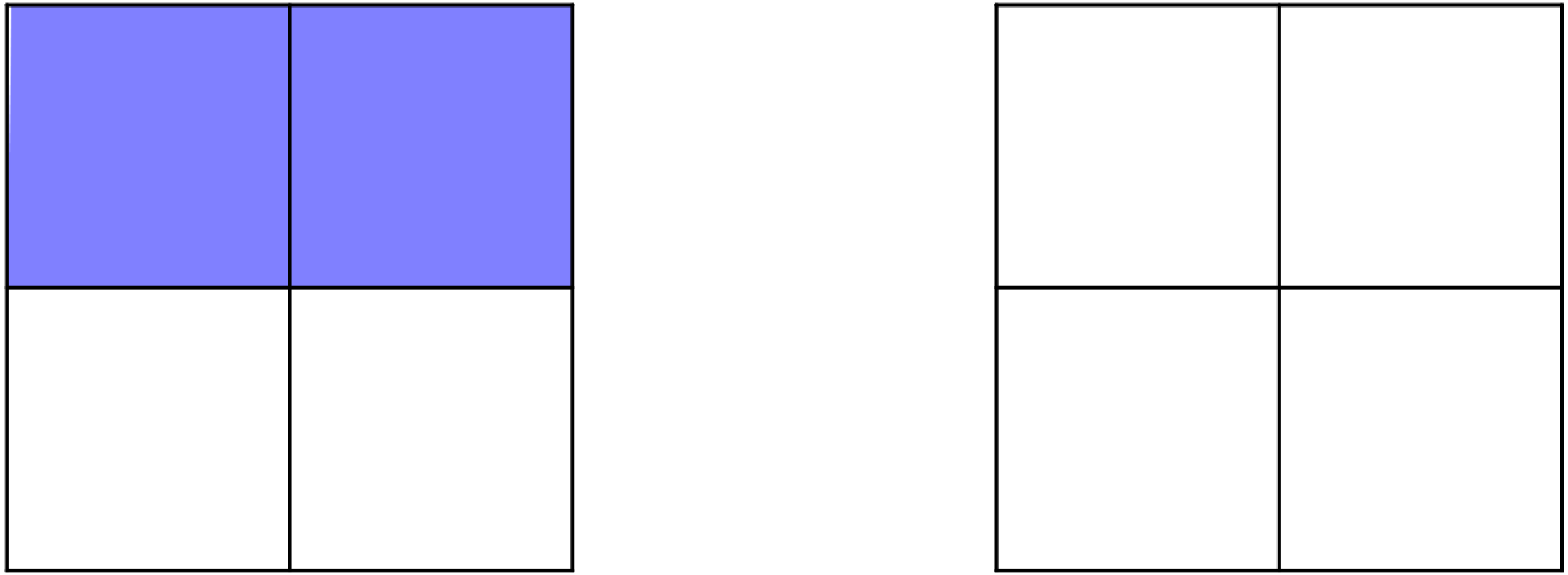
Situazione iniziale



Il primo marito si mette a sedere (prob. 8/8)

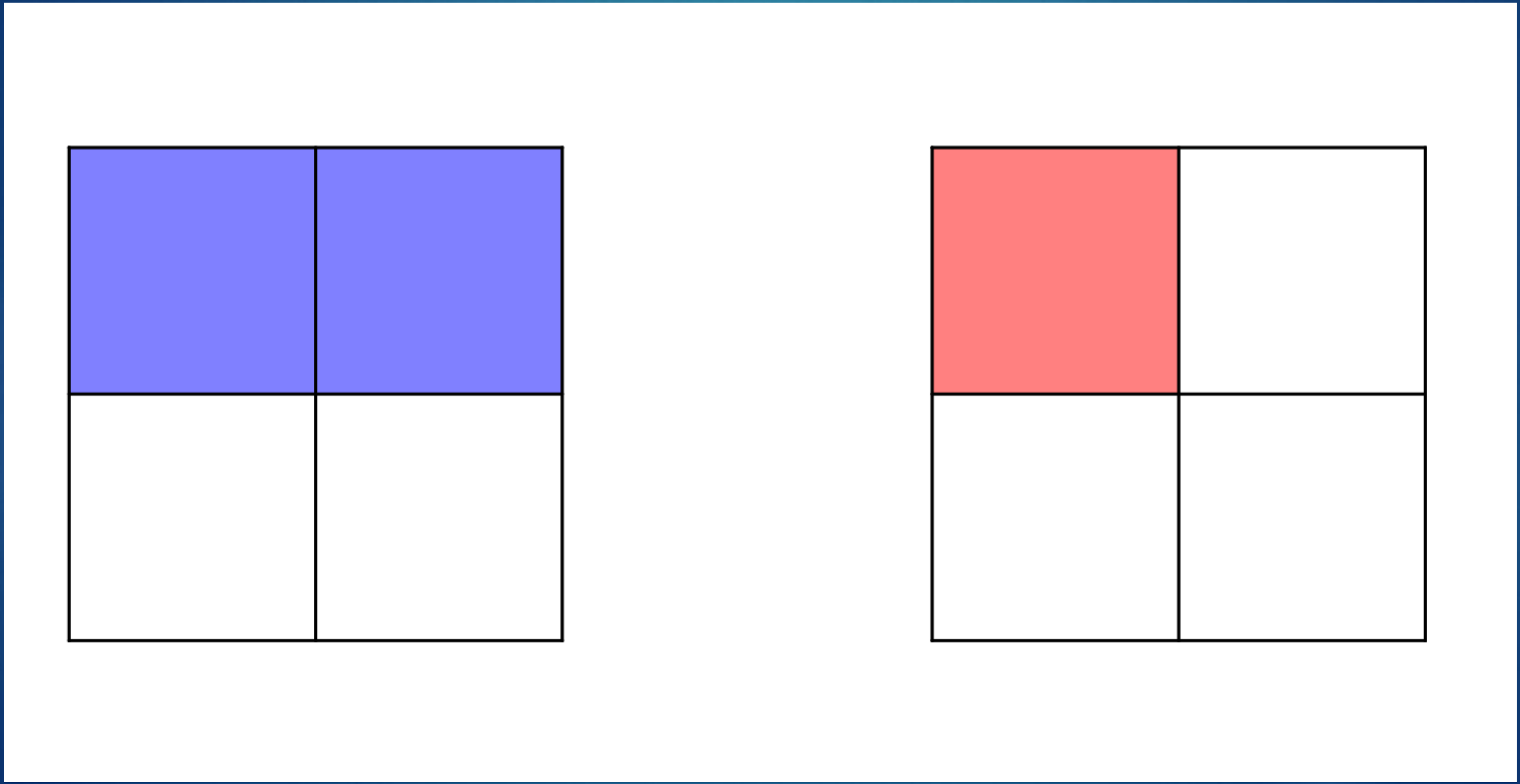


La moglie si mette a sedere allo stesso tavolo del marito (prob. 3/7)

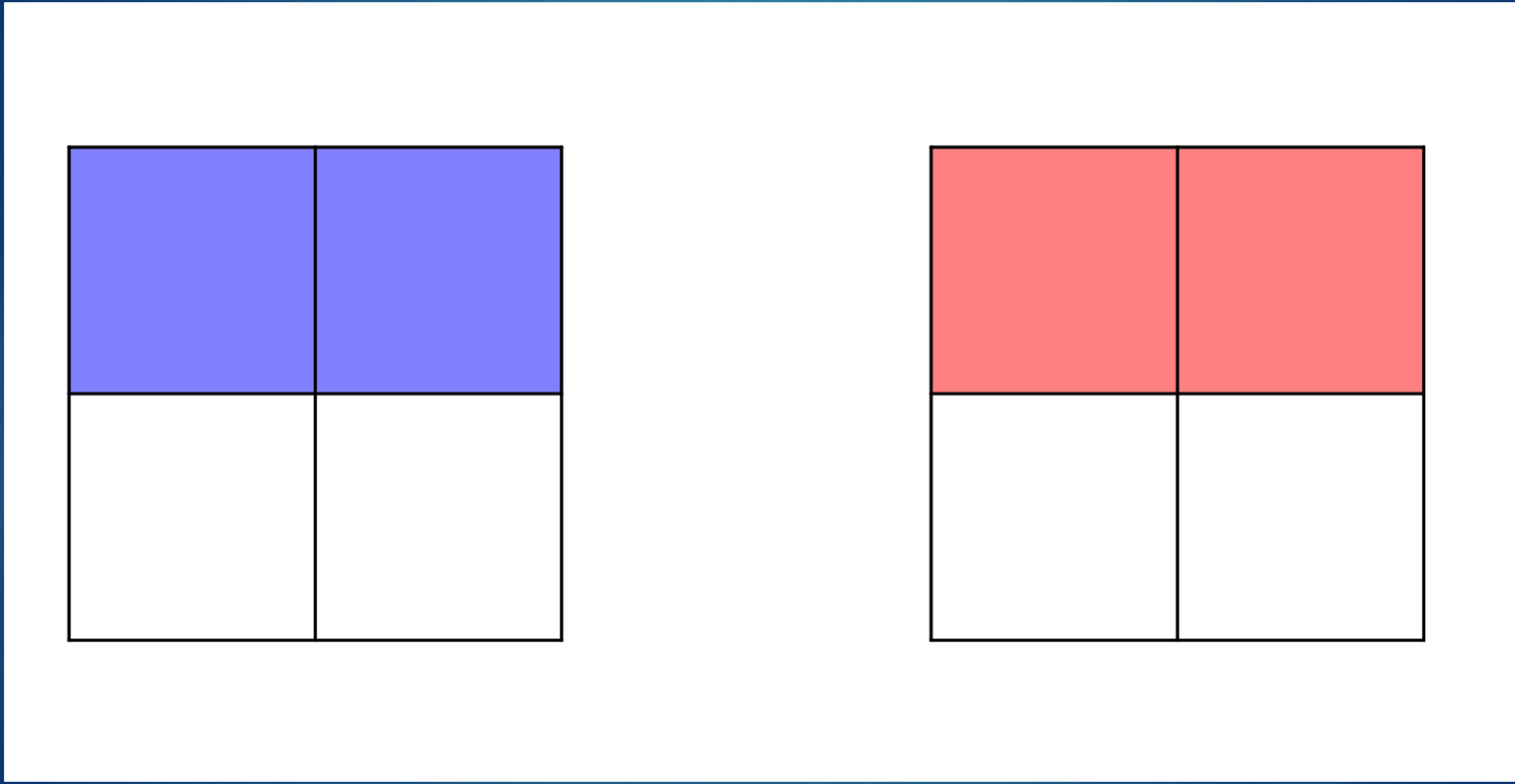


A questo punto, il marito della seconda coppia <u>**non**</u> può scegliere uno dei due posti disponibili del tavolo già selezionato dalla prima coppia (in caso contrario le coppie che stanno insieme sarebbero 4), ma deve sedersi in uno qualsiasi dei 4 posti liberi dell'altro tavolo (su 6 disponibili) e ovviamente sua moglie deve scegliere uno dei 3 posti liberi del tavolo (su 5 disponibili).

Il marito della seconda coppia si siede all'ALTRO TAVOLO (prob. 4/6)



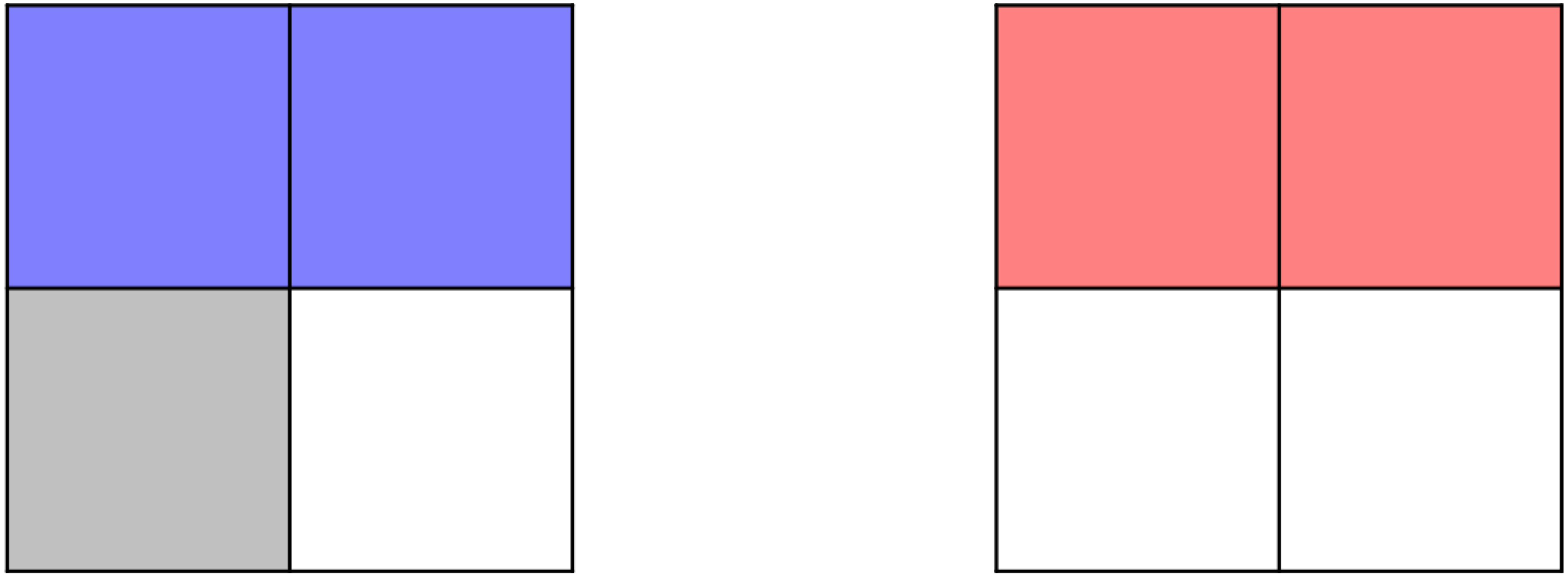
La moglie si siede allo stesso tavolo del marito (prob. 3/5)



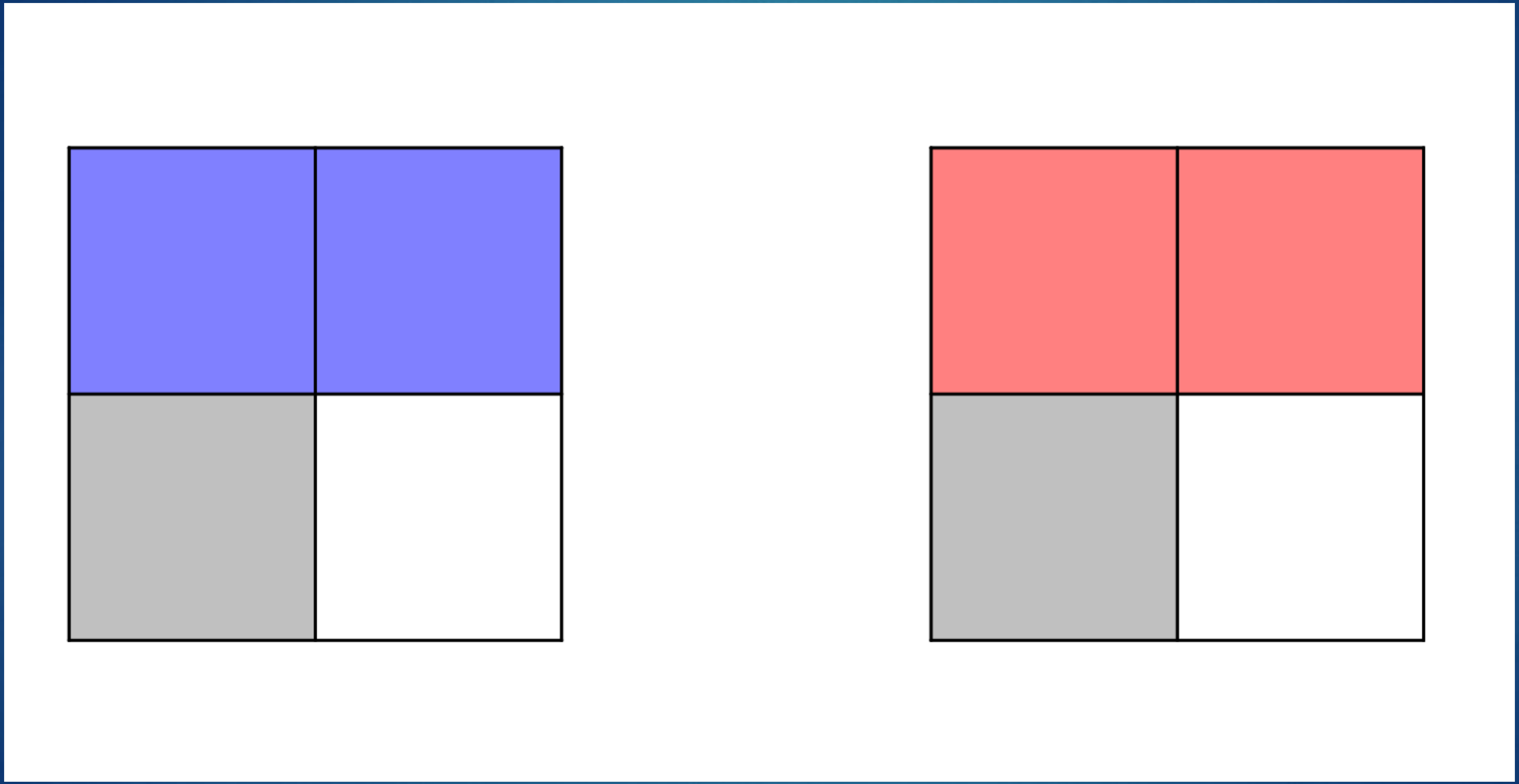
Il marito della terza coppia siede dove vuole, mentre sua moglie, per **non stare insieme a lui**, deve scegliere uno dei 2 posti liberi (su 3 disponibili) all'altro tavolo;

l'ultima coppia siederà **automaticamente** in due tavoli diversi, dato che resta un posto libero per ognuno dei due tavoli.

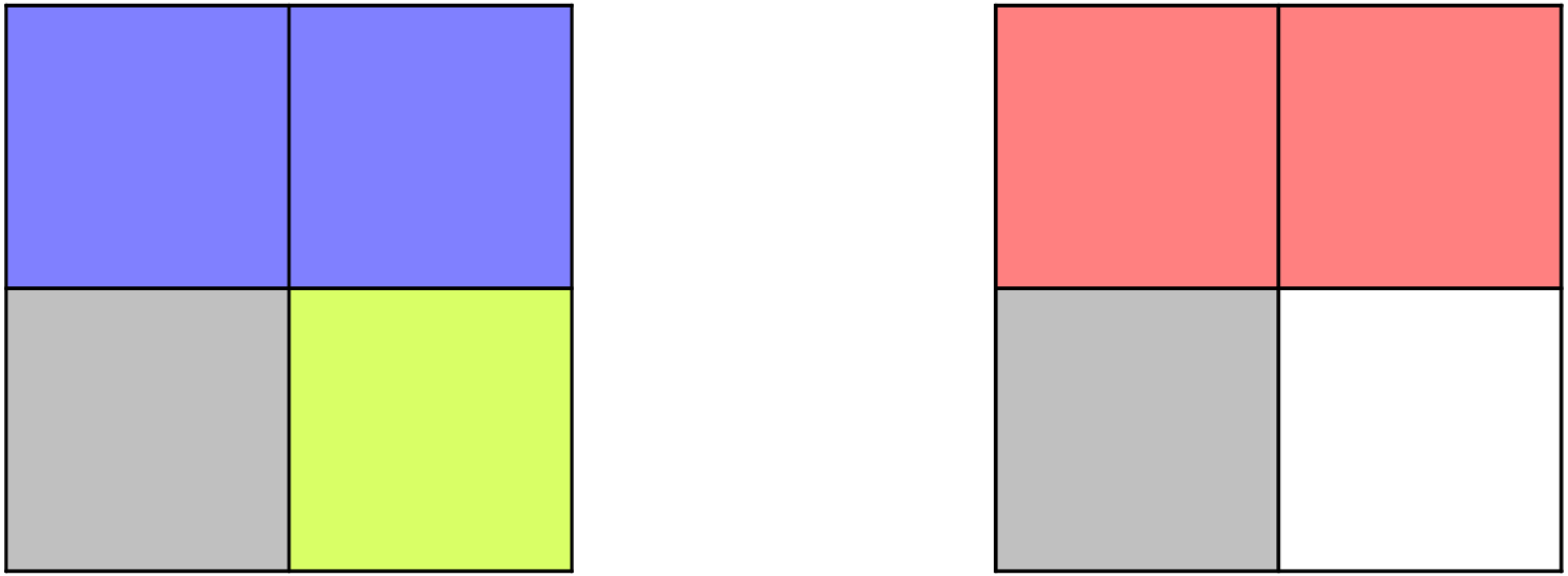
Il marito della terza coppia si siede a un tavolo (prob. 4/4)



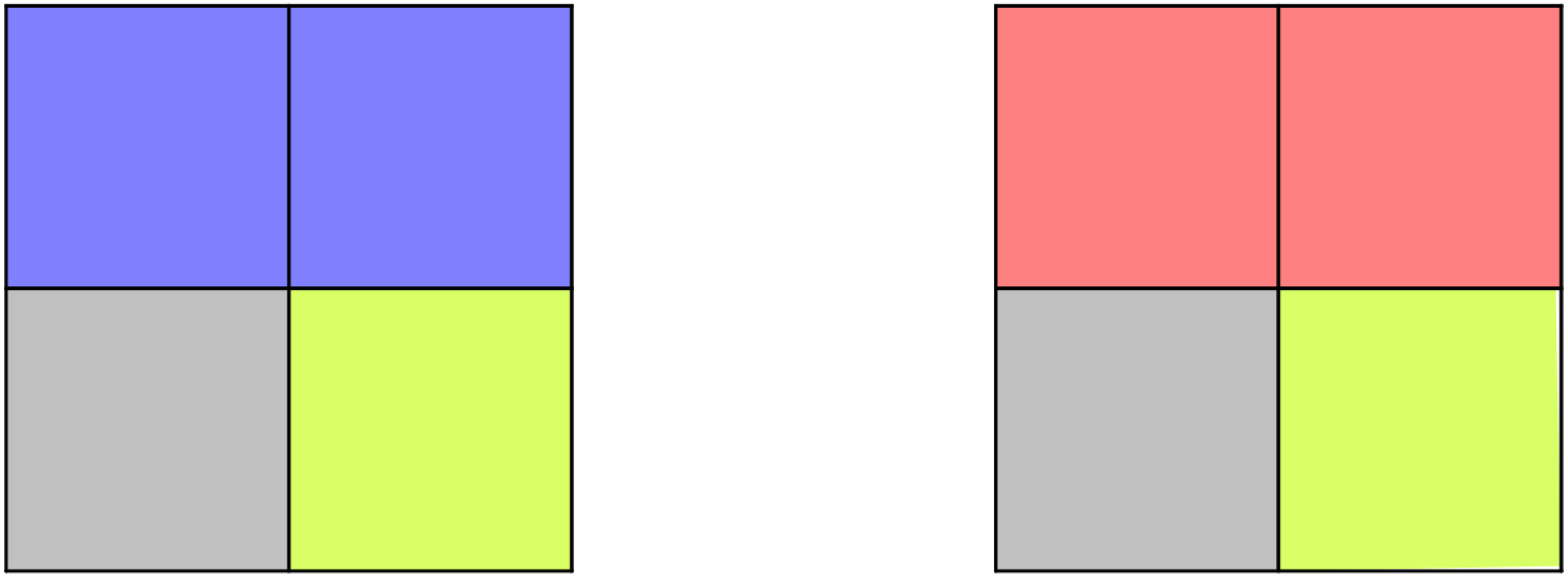
La moglie si siede all'ALTRO TAVOLO (prob. 2/3)



Il marito della quarta coppia sceglie **uno dei due posti rimanenti**



La moglie si siede nell'ultimo posto disponibile



In definitiva:

$$p = \binom{4}{2} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{24}{35}$$

Seconda soluzione

Consideriamo uno dei due tavoli: **solo una coppia potrà stare insieme**, occupando due dei quattro posti; per gli altri due dobbiamo scegliere due persone di due coppie distinte.

Ci sono $\binom{4}{1} = 4$ modi di scegliere la coppia che siederà al tavolo, poi ci sono $\binom{3}{2} = 3$ modi di scegliere due coppie che forniranno **<u>una persona ciascuna</u>** (ci sono 2 possibilità di scelta per ciascuna coppia) per completare il tavolo.

Le possibili composizioni del tavolo sono $\binom{8}{4}$, la probabilità è

$$p = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 2}{\binom{8}{4}} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{35}}$$

Gioco dell’oca

Francesca partecipa al seguente gioco:

- all'inizio la pedina è sulla casella 0;
- ad ogni lancio di una moneta **truccata** (dà testa con probabilità p), se esce croce la pedina avanza di una casella, mentre se esce testa la pedina avanza di due caselle.
- Si determini la probabilità che la pedina prima o poi capiti nella casella n.

Prima soluzione

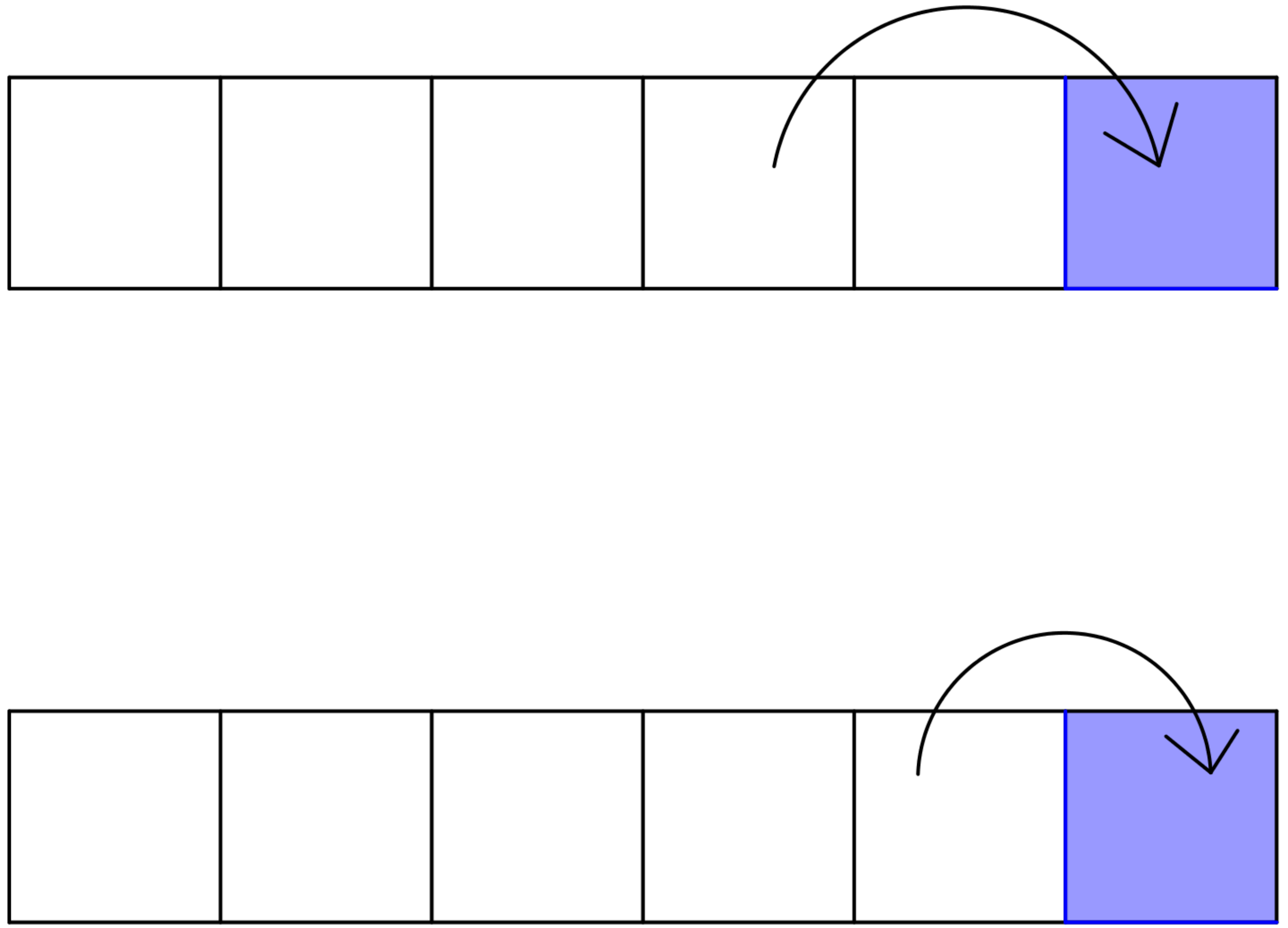
Poniamo $P_n =$ probabilità che la pedina capiti (prima o poi) nella casella n. All'inizio si ha $P_0 = 1$; ovviamente poi risulta

$$\boldsymbol{P_1 = 1 - p}$$

$$\boldsymbol{P_2 = p + (1 - p)^2}$$

In generale, con n > 2, si arriva nella casella n in due casi:

- si arriva nella casella $n - 2$ e poi esce testa;
- si arriva nella casella $n - 1$ e poi esce croce.



$$P_n = (1-p)\,P_{n-1} + \,p\,P_{n-2}$$

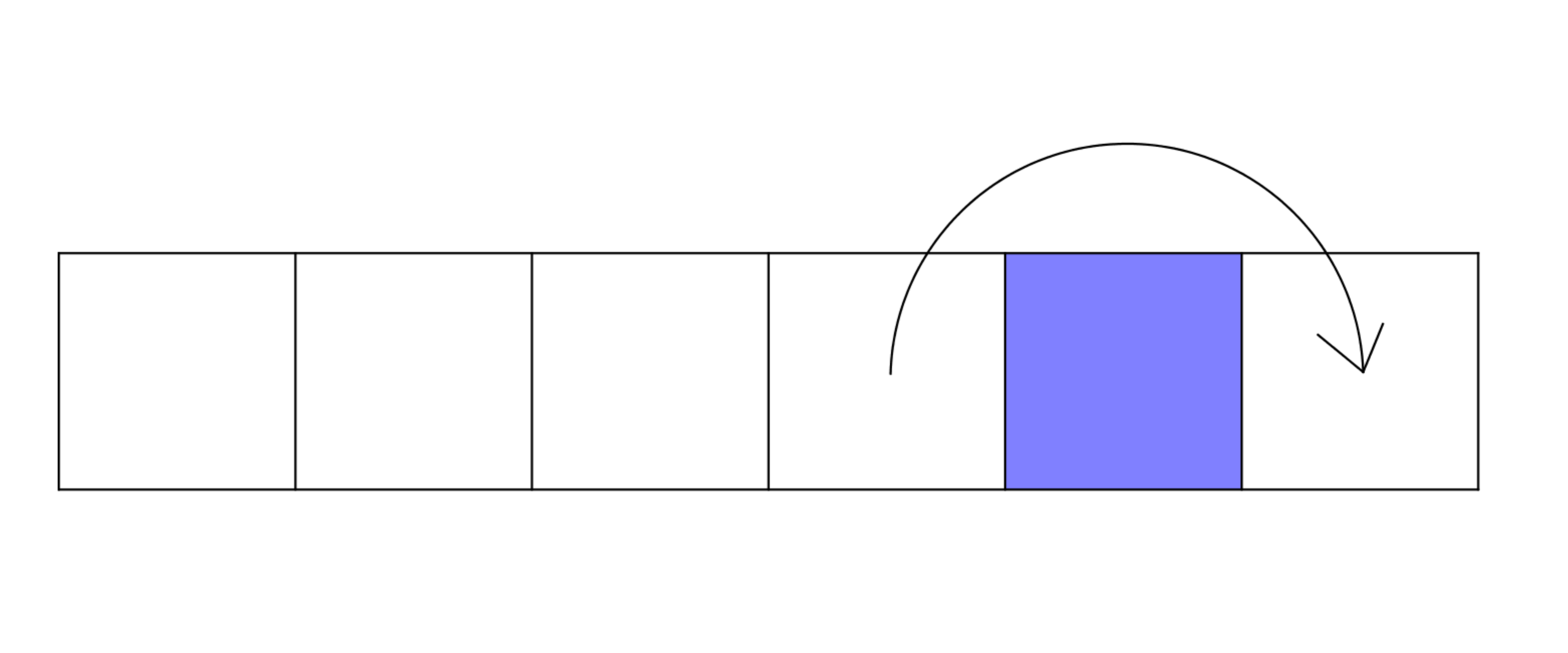
con le condizioni iniziali

$$P_0 = 1\,; \qquad P_1 = 1-p$$

Seconda soluzione

Facciamo leva sull'evento contrario:

la probabilità che la pedina **non** capiti nella casella n coincide con la probabilità che la pedina capiti nella casella (n-1) e successivamente esca testa (in modo così da **scavalcare** la casella n).



Risulta:

$$\boldsymbol{P_n = 1 - p\, P_{n-1}}$$

con la condizione iniziale

$$P_0 = 1$$

Cerchiamo la soluzione della forma

$$\boldsymbol{P_n = A + B(-p)^n}$$

dove i coefficienti A, B vengono determinati tenendo conto che $P_0 = 1$, $P_1 = 1 - p$. Si arriva così alla formula chiusa

$$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{1+p} + \frac{p}{1+p}(-p)^n}$$

Somme divisibili per 7

- Si lancia n volte un dado regolare a 6 facce e si calcola la somma X_n dei punteggi.

Qual è la probabilità che la somma suddetta risulti **<u>divisibile per 7</u>**?

Soluzione

La probabilità P_n si ottiene considerando che:

- se la somma X_{n-1} è divisibile per 7, sommando uno qualsiasi dei possibili 6 esiti del lancio n-esimo **non** possiamo ottenere un multiplo di 7;
- se la somma X_{n-1} non è divisibile per 7, c'è **un solo caso** sui 6 disponibili del lancio n-esimo per far sì che X_n sia multiplo di 7 (*ad esempio, se dopo (n−1) lanci risulta* $X_{n-1} = 26$, *all'n−esimo lancio deve uscire la faccia 2*).

Si arriva alla seguente relazione:

$$P_n = P_{n-1} \cdot 0 + (1 - P_{n-1}) \cdot \frac{1}{6}$$

$$P_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} P_{n-1}$$

ed essendo $P_0 = 1,\ P_1 = 0$ si ricava

$$P_n = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

Problema della tombola - 1

- Qual è la probabilità di fare tombola **entro** le prime 80 estrazioni?

Si supponga che il giocatore abbia una sola cartella con 15 numeri.

Prima soluzione

Degli 80 numeri estratti, 15 devono essere quelli della cartella, mentre gli altri 65 devono essere tra i restanti 75:

$$P(\text{tombola } \textbf{entro } 80 \text{ estraz.}) =$$

$$\frac{\binom{15}{15}\binom{75}{65}}{\binom{90}{80}} = \frac{\binom{75}{65}}{\binom{90}{80}} = \frac{\mathbf{1477595555}}{\mathbf{10197229023}} \approx \mathbf{0,145}$$

Seconda soluzione

Supponiamo che **siano già stati estratti 80 numeri**; è stata fatta tombola entro la 80-esima estrazione se e solo se i 15 numeri della cartella del giocatore sono tra questi 80 numeri estratti:

$$P(\text{tombola } \textbf{entro } 80 \text{ estraz.}) = \frac{\binom{80}{15}\binom{10}{0}}{\binom{90}{15}} = \frac{\mathbf{1477595555}}{\mathbf{10197229023}}$$

ovvero circa **0,145 (14,5%).**

Terza soluzione

Immaginiamo di estrarre tutti i 90 numeri. Se i 15 numeri della cartella sono stati estratti nelle prime 80 estrazioni, sicuramente gli **ultimi 10 numeri estratti** non fanno parte della mia cartella, quindi:

$$P(\text{tombola entro 80 estraz.}) =$$

$$\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}\cdot\frac{73}{88}\cdot\frac{72}{87}\cdot\frac{71}{86}\cdot\frac{70}{85}\cdot\frac{69}{84}\cdot\frac{68}{83}\cdot\frac{67}{82}\cdot\frac{66}{81} =$$

$$\mathbf{\frac{1477595555}{10197229023}}$$

Problema della tombola - 2

Qual è la probabilità di fare tombola **esattamente** alla 80-esima estrazione?

Prima soluzione

Nelle prime 79 estrazioni devono uscire **esattamente** 14 numeri della mia cartella (e quindi esattamente 65 numeri che non appartengono alla mia cartella), mentre all'estrazione successiva (la 80-esima) deve uscire l'ultimo numero della mia cartella:

$$P(\text{tombola } \mathbf{esattamente} \text{ all}'80 - \text{esima estrazione}) =$$

$$\frac{\binom{15}{14}\binom{75}{65}}{\binom{90}{79}} \cdot \frac{1}{11} = \frac{\mathbf{1477595555}}{\mathbf{54385221456}} \quad (2{,}72\ \%)$$

Seconda soluzione

$$= P(\text{tombola } \textbf{esattamente} \text{ all}'80 - \text{esima estrazione}) =$$

$$P(\text{tombola } \textbf{entro } 80 \text{ estrazion}i) - P(\text{tombola } \textbf{entro } 79 \text{ estrazion}i) =$$

$$\frac{\binom{15}{15}\binom{75}{65}}{\binom{90}{80}} - \frac{\binom{15}{15}\binom{75}{64}}{\binom{90}{79}} = \frac{\mathbf{1477595555}}{\mathbf{54385221456}}$$

Terza soluzione

Immaginiamo di estrarre tutti i 90 numeri. Notiamo che gli **ultimi** 10 numeri estratti non devono appartenere alla mia cartella, mentre l'11-esimo estratto (sempre a partire dalla fine) ne deve fare parte; la probabilità richiesta è

$$P(\text{tombola } \textbf{esattamente} \text{ all}'80-\text{esima estrazione}) =$$

$$\left(\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}\cdot\frac{73}{88}\cdot\frac{72}{87}\cdot\frac{71}{86}\cdot\frac{70}{85}\cdot\frac{69}{84}\cdot\frac{68}{83}\cdot\frac{67}{82}\cdot\frac{66}{81}\right)\cdot\frac{15}{80}=$$

$$\mathbf{\frac{1477595555}{54385221456}}$$

Problema della tombola - 3

Quante sono, **<u>in media</u>**, le estrazioni necessarie per fare tombola?

Parecchie (secondo la nostra esperienza di giocatori natalizi…)

Prima soluzione

$$m = \sum_{k=15}^{90} k \cdot \frac{\binom{15}{14}\binom{75}{k-15}}{\binom{90}{k-1}} \cdot \frac{1}{91-k} = \frac{\mathbf{1365}}{\mathbf{16}}$$

Seconda soluzione

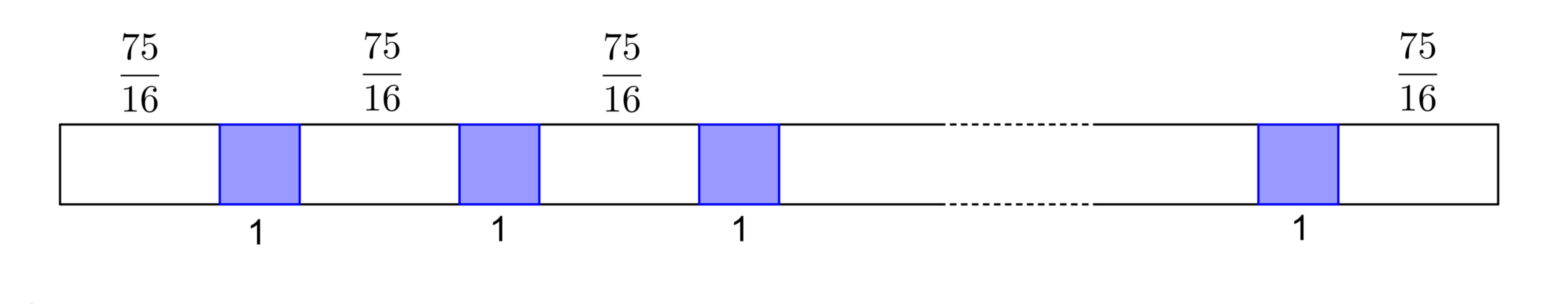
$$m = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{14} P(X > k) + \sum_{k=15}^{89} P(X > k)$$

$$m = 15 + \sum_{k=15}^{89} \left(1 - \frac{\binom{15}{15}\binom{75}{k-15}}{\binom{90}{k}} \right) = \frac{\mathbf{1365}}{\mathbf{16}}$$

Terza soluzione

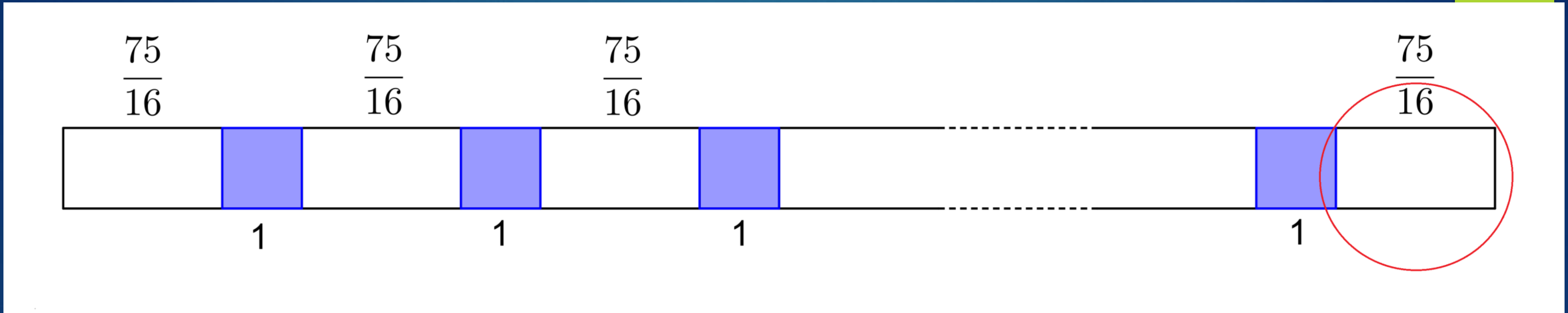
Mediamente, i 75 numeri che non fanno parte della mia cartella si **equidistribuiscono** in 16 parti:

- prima del primo numero della cartella;
- fra il primo e il secondo numero della cartella;
- fra il secondo e il terzo numero della cartella;
- …
- fra il 14-esimo e il 15-esimo numero della cartella;
- dopo il 15-esimo numero della cartella.



Il numero atteso di estrazioni è quindi uguale a:

$$m = 15 \cdot \left(\frac{75}{16} + 1\right) = \mathbf{\frac{1365}{16}} \approx \mathbf{85,3}.$$



Possiamo ragionare più semplicemente a partire da destra:

$$\boldsymbol{m = 90 - \frac{75}{16} = \frac{1365}{16}}$$

Fino all’ultima pallina

In una scatola ci sono 100 palline, di cui **50 rosse e 50 blu**.

Rocco sfida Greta al seguente gioco:

l'arbitro della sfida estrae una pallina alla volta, senza reinserimento.

- Rocco prende le palline rosse man mano che sono state estratte;
- Greta fa la stessa cosa con quelle blu.

Vince chi ottiene <u>per primo</u> le rispettive 50 palline.

Ad un certo punto, quando sono state estratte 32 palline rosse e 26 blu, i due devono interrompere il gioco. Come devono spartirsi il premio di 35 euro messo in palio all'inizio per il vincitore?

Prima soluzione

Calcoliamo la probabilità che Rocco vinca la partita partendo dalla situazione descritta. Nell'urna restano 18 palline rosse e 24 palline blu.

In pratica si tratta di determinare la **probabilità di estrarre 18 palline rosse <u>prima</u> di 24 palline blu**.

*Il numero di estrazioni che devono essere fatte per decretare il vincitore varia da un **<u>minimo</u>** di 18 ad un **<u>massimo</u>** di 41.*

la probabilità di vittoria di Rocco si ottiene come somma delle probabilità di 24 eventi disgiunti:

$E_1 =$ {si ottengono subito 18 palline rosse};

$E_2 =$ {si ottengono 17 palline rosse nelle prime 18 estrazioni, poi alla 19-esima si ottiene l'ultima rossa};

$E_3 =$ {si ottengono 17 palline rosse nelle prime 19 estrazioni, poi alla 20-esima si ottiene l'ultima rossa};

$E_4 =$ {si ottengono 17 palline rosse nelle prime 20 estrazioni, poi alla 21-esima si ottiene l'ultima rossa};

...

$E_{24} =$ {si ottengono 17 palline rosse nelle prime 40 estrazioni, poi alla 41-esima si ottiene l'ultima rossa}.

Sommando le corrispondenti 24 probabilità si ottiene:

$$P_{\text{Rocco}} = \sum_{k=0}^{23} \frac{\binom{18}{17}\binom{24}{k}}{\binom{42}{17+k}} \cdot \frac{1}{25-k} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

A Rocco, quindi, vanno

$$\frac{4}{7} \cdot (35 \text{ euro}) = \mathbf{20\ euro},$$

mentre a Greta spettano i restanti **15 euro**.

Seconda soluzione

Nella scatola restano 18 palline rosse e 24 palline blu;

ipotizzando di estrarre tutte le palline, la probabilità che **l'ultima** sia blu (che coincide con la probabilità di vittoria di Rocco) è

$$\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

La probabilità che **l'ultima** sia rossa (ovvero la probabilità che vinca Greta) è

$$\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

Pari o dispari? - 1

Qual è la probabilità che, lanciando ripetutamente un dado regolare a 6 facce, la faccia 6 compaia **<u>per la prima volta</u>** all'n-esimo tiro, con n **<u>dispari</u>**?

Prima soluzione

Si tratta di fare la somma delle probabilità:

$$P_{\text{dispari}} = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \frac{1}{6} + \cdots$$

$$P_{\text{dispari}} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \cdots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \mathbf{\frac{6}{11}}$$

Seconda soluzione

- Se al primo lancio esce la faccia 6 (ciò accade con probabilità $\frac{1}{6}$), abbiamo già finito (1 infatti è dispari);
- se al primo e al secondo lancio **<u>non</u>** esce la faccia 6, siamo di nuovo nella situazione di partenza.

$$P_{\text{dispari}} = \frac{1}{6} \cdot 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot P_{\text{dispari}}$$

$$\rightarrow \quad P_{\text{dispari}} = \mathbf{\frac{6}{11}}$$

Terza soluzione

- Se al primo lancio esce la faccia 6 (ciò accade con probabilità $\frac{1}{6}$), abbiamo già finito (1 infatti è dispari);
- se invece al primo lancio **non** esce la faccia 6 (ciò accade con probabilità $\frac{5}{6}$), **da quel punto in poi il primo 6 deve uscire in un numero pari di lanci** (sì, in un numero pari di lanci perché il primo lancio è già stato effettuato e quindi, se sommiamo 1 a un numero pari, si ottiene un numero dispari).

$$P_{\text{dispari}} = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - P_{\text{dispari}}\right) \quad \rightarrow \quad P_{\text{dispari}} = \mathbf{\frac{6}{11}}$$

Quarta soluzione

Calcoliamo la probabilità che il 6 compaia per la prima volta all'n-esimo tiro, con n **pari.**

- Se al primo lancio otteniamo 6, abbiamo un evento **sfavorevole** (1 infatti non è pari);
- se l'esito del primo lancio è una faccia diversa da 6 (ciò accade con probabilità $\frac{5}{6}$), da quel punto in poi **il primo 6 deve uscire in un numero dispari di lanci.**

$$P_{\text{pari}} = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - P_{\text{pari}}\right) \quad \rightarrow \quad P_{\text{pari}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}$$

Pari o dispari? - 2

Qual è la probabilità che, lanciando ripetutamente un dado regolare a 6 facce, la faccia 6 compaia **per la seconda volta** all'n-esimo tiro, con n **pari**?

Prima soluzione

Si tratta di fare la somma delle probabilità:

$$P_{\text{pari}} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \binom{3}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \binom{5}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6} + \cdots =$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 7\left(\frac{5}{6}\right)^6 + \cdots\right) = \cdots = \mathbf{\frac{61}{121}}$$

Seconda soluzione

- Se al primo lancio si ha un successo (ciò avviene con probabilità $\frac{1}{6}$), da quel punto in poi si deve avere **il primo successo in un numero dispari di lanci** (ciò avviene con probabilità $\mathbf{\frac{6}{11}}$);
- se al primo lancio non si ottiene un successo (ciò avviene con probabilità $\frac{5}{6}$), <u>da quel punto in poi</u> **si deve ottenere il secondo successo in un numero <u>dispari</u> di lanci.**

$$P_{\text{pari}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{6} \cdot P_{\text{dispari}}$$

$$P_{\text{pari}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - P_{\text{pari}}\right) \quad \rightarrow \quad P_{\text{pari}} = \mathbf{\frac{61}{121}}$$

Pari o dispari? - 3

- Lanciando 10 volte una moneta truccata (dà testa con prob. p), qual è la probabilità di ottenere testa un numero **<u>dispari</u>** di volte?
- Si valuti il risultato con $p = 0{,}8$.

Prima soluzione

$$P_{10} = \sum_{k=0}^{4} \binom{10}{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{10-(2k+1)}$$

con $p = 0{,}8$ otteniamo $\boldsymbol{P_{10} = \frac{4853288}{9765625}}$

Seconda soluzione

- Se al primo lancio otteniamo croce (prob. $1-p$), allora nei successivi $n-1$ lanci dobbiamo ottenere un numero **<u>dispari</u>** di teste;
- Se al primo lancio otteniamo testa (prob. p), allora nei successivi $n-1$ lanci dobbiamo ottenere un numero **<u>pari</u>** di teste.

$$P_n = (1-p)P_{n-1} + p(1-P_{n-1}) \qquad \text{con } P_0 = 0$$

$$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p)^n}$$

Sfida con due punti di vantaggio

Alberto sfida Barbara al seguente gioco: viene lanciata una moneta truccata (ad ogni lancio dà testa con probabilità p) e, se esce testa Alberto segna un punto, se esce croce segna un punto Barbara.

Vince il giocatore che **per primo si trova in vantaggio di 2 punti** sull'avversario.

Soluzione

Calcoliamo la probabilità di vittoria di Alberto.

- Se ai primi due lanci escono due teste, Alberto vince.
- Se ai primi due lanci escono una testa e una croce, siamo nella situazione di partenza.
- Se ai primi due lanci escono due croci, Alberto ha perso.

Si tratta di risolvere la seguente equazione:

$$P_{\text{Alberto}} = p^2 \cdot 1 \; + \; 2p(1-p) \cdot P_{\text{Alberto}} \; + \; (1-p)^2 \cdot 0$$

da cui ricaviamo

$$\boldsymbol{P_{\text{Alberto}} = \frac{p^2}{2p^2 - 2p + 1}}$$

Chiaramente

$$P_{\text{Barbara}} = 1 - \frac{p^2}{2p^2 - 2p + 1} = \boldsymbol{\frac{(1-p)^2}{2p^2 - 2p + 1}}$$

Problema dei rigori

Due squadre sono arrivate a giocarsi la Coppa ai rigori.

Dopo i primi 4 rigori a testa sono in parità.

La squadra A fa gol ad ogni tiro con probabilità x, la squadra B fa gol ad ogni tiro con probabilità y.

Quali sono le rispettive probabilità di vittoria finale?

Prima soluzione

$$P_A = x(1-y) + \big(xy + (1-x)(1-y)\big)x(1-y) +$$

$$+ \big(xy + (1-x)(1-y)\big)^2 x(1-y) + \cdots$$

$$P_A = x(1-y)\sum_{k=0}^{+\infty}\big(xy + (1-x)(1-y)\big)^k$$

$$P_A = \frac{x(1-y)}{x+y-2xy}$$

Seconda soluzione

$$P_A = x(1-y) + \big(xy + (1-x)(1-y)\big)P_A$$

da cui

$$\boldsymbol{P_A = \frac{x(1-y)}{x+y-2xy}}$$

Scambiando il ruolo di x e y si ottiene

$$\boldsymbol{P_B = \frac{y(1-x)}{x+y-2xy}}$$

Successi consecutivi - 1

Lanciando ripetutamente un dado regolare a 6 facce, indichiamo come **successo** l'uscita della faccia 6.

a) Qual è la probabilità che in 7 lanci del dado **non** vi sia una sequenza di **3 successi consecutivi**?

b) Qual è la probabilità che il terzo successo consecutivo arrivi per la prima volta esattamente al settimo lancio?

Prima soluzione

Sia P_n la probabilità che in n lanci non vi sia una serie di 3 successi consecutivi, **analizziamo la situazione in base all'uscita del <u>primo insuccesso</u>**:

- se avviene al **<u>primo</u>** lancio, in tal caso la probabilità di non ottenere tre successi consecutivi in n lanci coincide con quella di non avere tre successi consecutivi in (n-1) lanci, ossia con P_{n-1} ;
- se avviene al **<u>secondo</u>** lancio, in tal caso la probabilità di non ottenere tre successi consecutivi in n lanci coincide con quella di non avere tre successi consecutivi in (n-2) lanci, cioè con P_{n-2};

- se avviene al <u>**terzo**</u> lancio, in tal caso la probabilità di non ottenere tre successi consecutivi in n lanci coincide con quella di non avere tre successi consecutivi in (n-3) lanci, cioè con P_{n-3} ;

- se avviene <u>**oltre il terzo lancio**</u>, in tal caso la probabilità di non ottenere tre successi consecutivi in n lanci è uguale a 0, dal momento che <u>**abbiamo già ottenuto**</u> tre successi nei primi tre lanci.

$$P_n = \frac{5}{6} P_{n-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} P_{n-2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} P_{n-3} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 0$$

con le condizioni iniziali $P_0 = 1,\ P_1 = 1,\ P_2 = 1.$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$P_3 = \frac{215}{216} \qquad P_4 = \frac{1285}{1296} \qquad P_5 = \frac{80}{81} \qquad P_6 = \frac{425}{432}$$

$$P_7 = \mathbf{\frac{274325}{279936}}$$

b) Qual è la probabilità che il terzo successo consecutivo arrivi per la prima volta **esattamente al settimo lancio**?

Prima soluzione

$$P_6 - P_7 = \frac{425}{432} - \frac{274325}{279936} = \mathbf{\frac{1075}{279936}}$$

(circa 0,38 %)

Seconda soluzione

Dobbiamo avere un successo al settimo, al sesto e al quinto lancio, un insuccesso al quarto lancio e **non** dobbiamo avere 3 successi consecutivi nei primi 3 lanci:

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad X \;\; S \;\; S \;\; S$$

$$P = \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^3\right) \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{\mathbf{1075}}{\mathbf{279936}}$$

Successi consecutivi - 2

Lanciando ripetutamente un dado regolare a 6 facce, indichiamo come **successo** l'uscita della faccia 6, qual è il numero atteso di lanci necessari per ottenere **10 successi consecutivi**?

Prima soluzione

Procedendo in modo analogo al problema precedente, si tratta di **analizzare la situazione in base all'uscita del <u>primo insuccesso</u>**:

- se il primo insuccesso arriva al primo lancio, si tratta di ripartire daccapo sommando 1 al numero atteso di lanci;
- se il primo insuccesso arriva al secondo lancio, si tratta di ripartire daccapo sommando 2 al numero atteso di lanci;
- …

- se il primo insuccesso arriva al decimo lancio, si tratta di ripartire daccapo sommando 10 al numero atteso di lanci;
- se il primo insuccesso arriva **oltre** il decimo lancio, abbiamo finito.

$$m = \frac{5}{6} \cdot (1 + m) + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot (2 + m) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot (3 + m) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{5}{6} \cdot (10 + m) + \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot 10$$

Risolvendo l'equazione di primo grado si trova

$$m = \mathbf{72559410}\ .$$

In generale, se l'obiettivo è ottenere n successi consecutivi, il numero atteso di lanci è uguale a:

$$m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^k}$$

Seconda soluzione

Indichiamo con L_n il numero medio di lanci necessari per veder comparire n teste consecutive. Ovviamente $L_1 = \frac{1}{1/6} = 6$.

Per avere n teste consecutive, osserviamo che, per prima cosa, occorrono in media L_{n-1} lanci per averne $(n-1)$ di fila. Al lancio successivo:

- se esce 6 (successo) abbiamo finito;
- se invece otteniamo un insuccesso (faccia $\neq 6$) dobbiamo ripartire daccapo.

$$L_n = \frac{1}{6} \cdot (L_{n-1} + 1) + \frac{5}{6} \cdot (L_{n-1} + 1 + L_n)$$

quindi

$$L_n = 6\,L_{n-1} + 6$$

tenendo presente che $L_1 = 6$, si trova la formula chiusa:

$$\boldsymbol{L_n = \frac{6}{5}(6^n - 1)}$$

Nel caso particolare $n = 10$ si ricava

$$L_{10} = \mathbf{72559410}.$$

Una strana sfida - 1

Anna sfida Bruno al seguente gioco:

due dadi regolari a sei facce vengono ripetutamente lanciati, calcolando ogni volta la somma dei due esiti, finché non esce **un 12** oppure **<u>due volte consecutive</u> il 7**.

Anna vince nel primo caso, Bruno nel secondo.

a) Quali sono le rispettive probabilità di vittoria?
b) <u>Mediamente</u>, quanti lanci sono necessari per decretare il vincitore?

Soluzione

Calcoliamo la probabilità di vittoria di Anna.

- Se al primo lancio si ottiene 12, Anna ha vinto;
- se al primo lancio non esce né 12 né 7, torniamo al punto di partenza;
- se al primo lancio esce 7, dobbiamo analizzare l'esito del secondo lancio:
  - se al secondo lancio esce 12, Anna ha vinto;
  - se al secondo lancio non esce né 12 né 7, torniamo al punto di partenza;
  - se al secondo lancio esce 7, Anna ha perso.

Risulta:

$$P_{\text{Anna}} = \frac{1}{36} + \frac{29}{36} \cdot P_{\text{Anna}} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{29}{36} \cdot P_{\text{Anna}} \right)$$

da cui ricaviamo

$$P_{\text{Anna}} = \frac{7}{13} \; ; \qquad P_{\text{Bruno}} = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$$

In modo analogo è possibile calcolare direttamente P_{Bruno} :

$$P_{\text{Bruno}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{29}{36} \cdot P_{\text{Bruno}} \right) + \frac{29}{36} \cdot P_{\text{Bruno}}$$

b) Calcoliamo ora il **numero atteso di lanci**.

Ci sono vari casi da analizzare:

- se al primo lancio si ottiene 12, il numero di lanci è = 1;
- se al primo lancio non si ottiene né 12 né 7, si riparte daccapo;
- se al primo lancio si ottiene 7, dobbiamo analizzare l'esito del secondo lancio:
  - se al secondo lancio si ottiene 7, il numero di lanci è = 2;
  - se al secondo lancio si ottiene 12, il numero di lanci è = 2;
  - se al secondo lancio non si ottiene né 12 né 7, si riparte daccapo.

Si tratta di risolvere la seguente equazione:

$$m = \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{29}{36} \cdot (1 + m) + \left(\frac{6}{36}\right)^2 \cdot 2 +$$

$$+ \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{6}{36} \cdot \frac{29}{36} \cdot (2 + m)$$

da cui ricaviamo

$$\boldsymbol{m = \frac{252}{13} \approx 19{,}4} \, .$$