Qualche esercizio sulle derivate - Foglio 3
5^aE Liceo Scientifico 14/10/2013

Esercizio 1. Assegnata la curva $y = \sqrt{x^2+2} - 3\,x$, trovare il suo punto di intersezione A con l'asse delle ascisse. Scrivi l'equazione della retta tangente in A. **[R.** $A\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$**; la tangente è** $y = -\frac{8}{3}\,x + \frac{4}{3}$**]**

Esercizio 2. Sia f la funzione definita, per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.
• Determinare l'equazione della curva simmetrica rispetto all'asse y. Similmente si faccia per la curva simmetrica rispetto alla retta $y = -1$. **[R.** $y = -x^3\,\ln(-x)$ **;** $y = -x^3 \ln x - 2$ **.]**
• Sia P il punto in cui f interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente al grafico di f in P. **[R.** $y = x^2 - x$ **.]**
(Sessione ordinaria PNI 2013 - Italia)

Esercizio 3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1-x^2}{4\,x^2}$ si scrivano le equazioni delle tangenti al grafico nei punti di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo T che esse formano con l'asse x.
[R. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ **;** $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ **; l'area è** $= \frac{1}{2}$ **.]**
(Sessione straordinaria 2013 - Corso di ordinamento - Italia)

Esercizio 4. Assegnata la curva $y = \dfrac{4-x^2}{2\,x+1}$ determinare:
a) le ascisse dei punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta di equazione $4\,x + 3\,y - 6 = 0$;
b) le equazioni delle rette tangenti condotte dal punto $P(2;-3)$ alla curva, individuando anche le coordinate dei punti di tangenza.
[R. a) I punti richiesti hanno ascisse rispettivamente $x = 1$ **e** $x = -2$**.**
b) I punti di tangenza sono $T_1(-3;1)$ **e** $T_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ **e le rispettive rette tangenti hanno equazioni** $y = -\dfrac{4}{5}\,x - \dfrac{7}{5}$ **e** $y = -\dfrac{16}{5}\,x + \dfrac{17}{5}$ **.]**

Esercizio 5. Dopo aver determinato i punti A e B (con $x_A > x_B$) in cui la curva $y = \dfrac{x^2-1}{2\,x}$ interseca l'asse x, si scriva l'equazione della circonferenza passante per B e tangente in A alla curva data. Determinare l'ulteriore punto P di intersezione tra le due curve. Determinare l'angolo α sotto cui le due curve si secano in B. **[R.** $A(1;0)$**,** $B(-1;0)$**; la circonferenza è** $x^2 + (y-1)^2 = 2$ **;** $P\left(-\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$ **;** $\alpha = 90°$**.]**
(Sessione ordinaria 1998 - Italia)

Esercizio 6. Si consideri la famiglia di curve $y = (x-a)e^{2-\frac{x}{a}}$, dove a è un parametro reale positivo ed e è il numero di Nepero. Si dimostri che, al variare di a, le curve tagliano l'asse delle ascisse secondo lo stesso angolo α. Si determini l'ampiezza di α in gradi e primi sessagesimali. **(Sessione suppletiva 2010 - PNI) [R. La derivata calcolata in** $x = a$ **è uguale a** e **per ogni** $a > 0$**, quindi** $\alpha = \arctan(e) \approx 69°\,48'\,9''$ **.]**

Esercizio 7. Si considerino le curve $y = 1 + \ln(2\,x+3)$ e $y = \sqrt{4\,x+5}$. Si verifichi che sono tra loro tangenti nel punto $T(-1;1)$, determinando l'equazione della retta tangente comune. **[R.** $y = 2\,x + 3$ **.]**

Esercizio 8. Si determinino i valori di a per cui le curve $y = a\,x^2 + b\,x$ e $y = \sqrt{x^2+3}$ risultano ortogonali nel punto $P(1;2)$. **[R.** $a = -4$**,** $b = 6$**]**

Esercizio 9. (**) Si consideri l'iperbole $y = \dfrac{1}{2\,x-4}$. Si dimostri che i triangoli formati dalla retta tangente nel generico punto di ascissa x_0 e dagli asintoti hanno tutti la stessa area (uguale a 1).

Esercizio 10. (***) Data l'iperbole $\gamma : y = 5 + \dfrac{4}{x}$ si determini, tra i suoi punti del ramo contenuto nel primo quadrante, il punto T più vicino al punto $C(0;-10)$. Si determinino inoltre i punti di intersezione tra γ e la circonferenza di centro C e passante per T. **[R.** $T(4;6)$**. I punti di intersezioni sono** T **(contato due volte),** $A(\sqrt{15}-4;-11-4\sqrt{15})$ **e** $B(-\sqrt{15}-4;-11+4\sqrt{15})$**.]**