Prova scritta di matematica: cosa (e come) valutare

Francesco Daddi

Liceo Scientifico "Buonarroti" Pisa

INTRODUZIONE: IL CONTESTO

- L'Esame di Stato è cambiato tanto negli ultimi anni; è sicuramente più bello e interessante, ma ci sono tanti fattori al contorno da analizzare.

- Siamo sempre di corsa, c'è il timore di non finire il programma (Indicazioni Nazionali). Tempo ristretto per affrontare con serenità e con il giusto approfondimento tutti i vari argomenti (spesso capita di doverne anticipare alcuni al quarto anno, per non dover "correre" eccessivamente l'anno successivo).

- La prova ministeriale difficilmente risulta "adatta" agli studenti di quinta scientifico, analizzate le situazioni degli ultimi anni.

COME PREPARARE ALL'ESAME DI STATO?

- Ovviamente tutto dipende da noi docenti: **quali sono le nostre priorità?** Sono i vecchi temi delle maturità a fissarle, in modo implicito, ma spesso ciò condiziona in modo eccessivo le scelte didattiche.

- Spesso accade che si punti essenzialmente sugli esercizi, tralasciando elementi teorici importanti. Le lezioni sono improntate a fornire "istruzioni per l'uso", finalizzate quasi del tutto al superamento della seconda prova dell'Esame di Stato.

- È necessario invece **indirizzare alla "consapevolezza**": lo studente non deve agire per modelli prefissati, monolitici, ricalcando schemi già visti e rivisti; al contrario, **deve conoscere gli strumenti matematici e, tra di essi, scegliere quello più adatto** alla risoluzione del problema in gioco.

ALCUNE PROPOSTE

Tecniche

- Abolire la distinzione problemi/quesiti.

- Introduzione di un punteggio esplicito per ogni richiesta.

- Inserire una batteria di esercizi obbligatori, superando così l'attuale libertà totale di scelta.

- Chiarimento da parte del MIUR sugli argomenti da affrontare durante i 5 anni liceali (specialmente per quanto riguarda il quinto anno). Non è purtroppo possibile approfondire tutto.

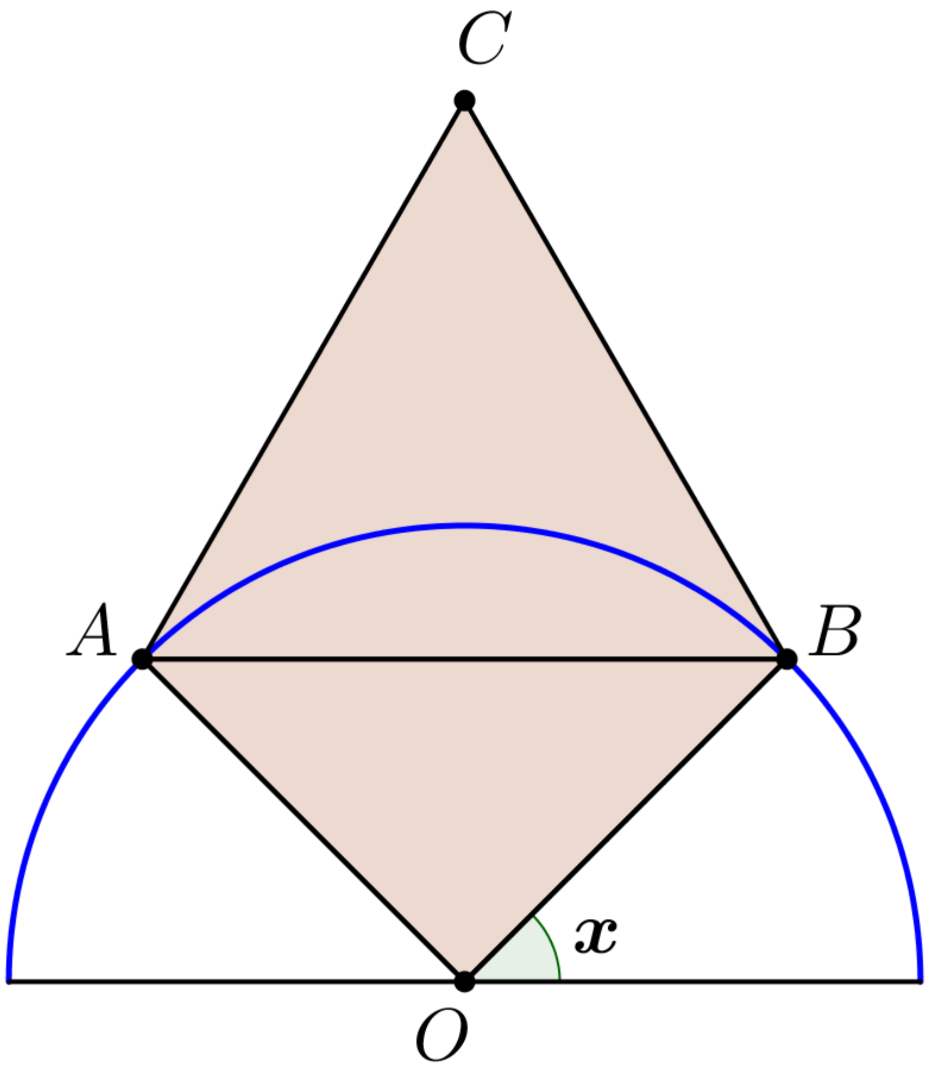
Proposte didattiche

• Puntare su problemi senza "troppe descrizioni", senza guide prestabilite. Problemi sintetici, senza suggerimenti (non bisogna "dire troppo"): lo studente deve essere **autonomo** nella scelta della risoluzione che ritiene più adatta. Chiaramente il livello di difficoltà deve essere adeguato.

• La valutazione dovrebbe tener conto della **strategia** che è stata seguita, se le **idee** sono state concretizzate oppure se sono rimaste solo "sulla carta", se gli strumenti matematici sono stati utilizzati in modo adeguato, se sono stati analizzati tutti i casi, ecc.

• Riconsiderazione del "vecchio" problema trigonometrico (con eventuali parametri): ottima palestra per gli studenti.

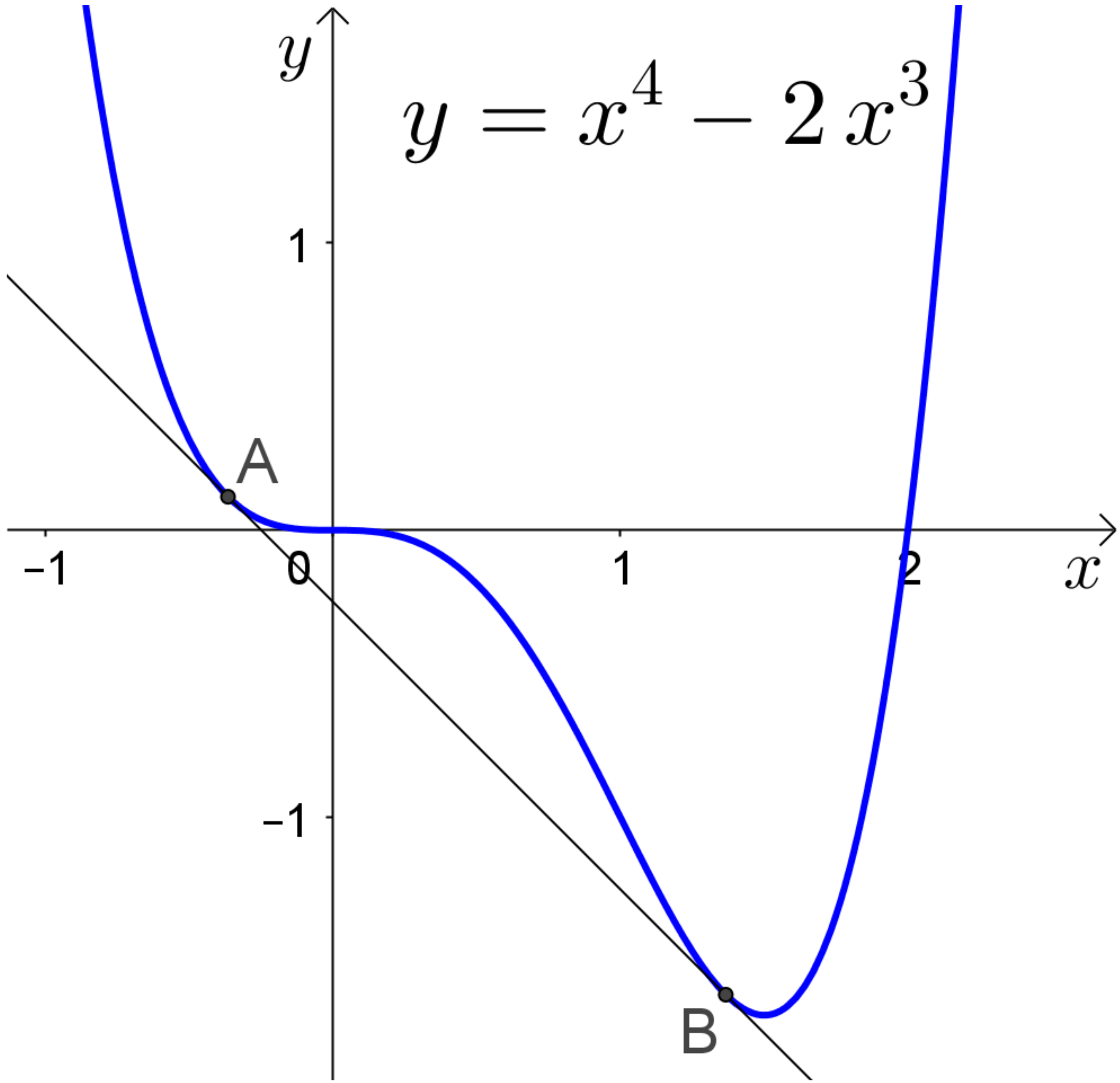
Il triangolo ABC è equilatero; si determini l'angolo x per cui il segmento OC ha lunghezza massima.



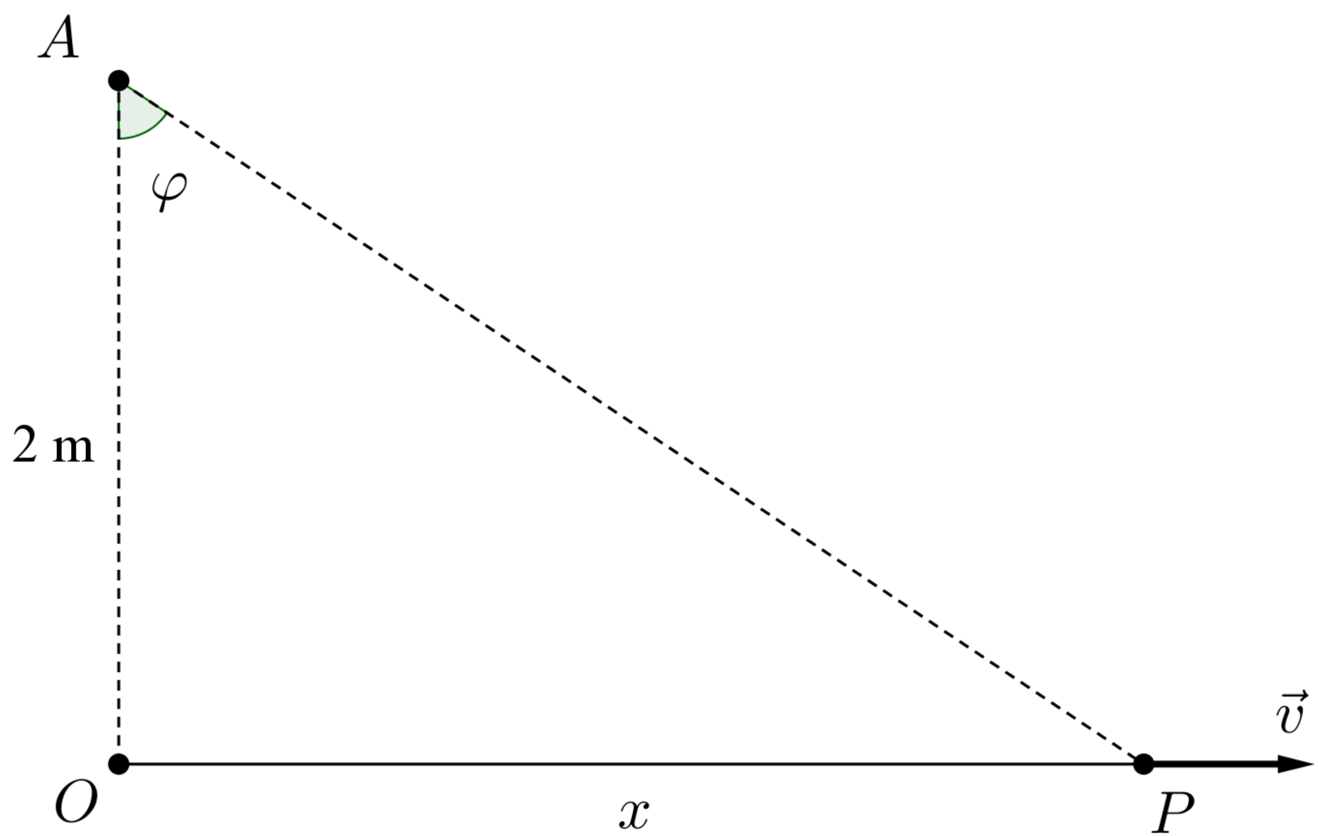
- Ogni tema di maturità dovrebbe avere, oltre alle situazioni "standard", anche ***qualcosa di nuovo***, qualcosa che abbia la funzione di ***disorientare*** un po' lo studente medio, per cercare di valutare le effettive **competenze matematiche** acquisite nei 5 anni del percorso liceale. Evitare quindi la ripetitività acritica di procedimenti, senza capirne il perché.

- Lo studente dovrebbe fornire dei ragionamenti sull'accettabilità e coerenza dei risultati ottenuti. Importanza della stima in generale.

Determinare l'equazione della retta bitangente alla curva in figura.



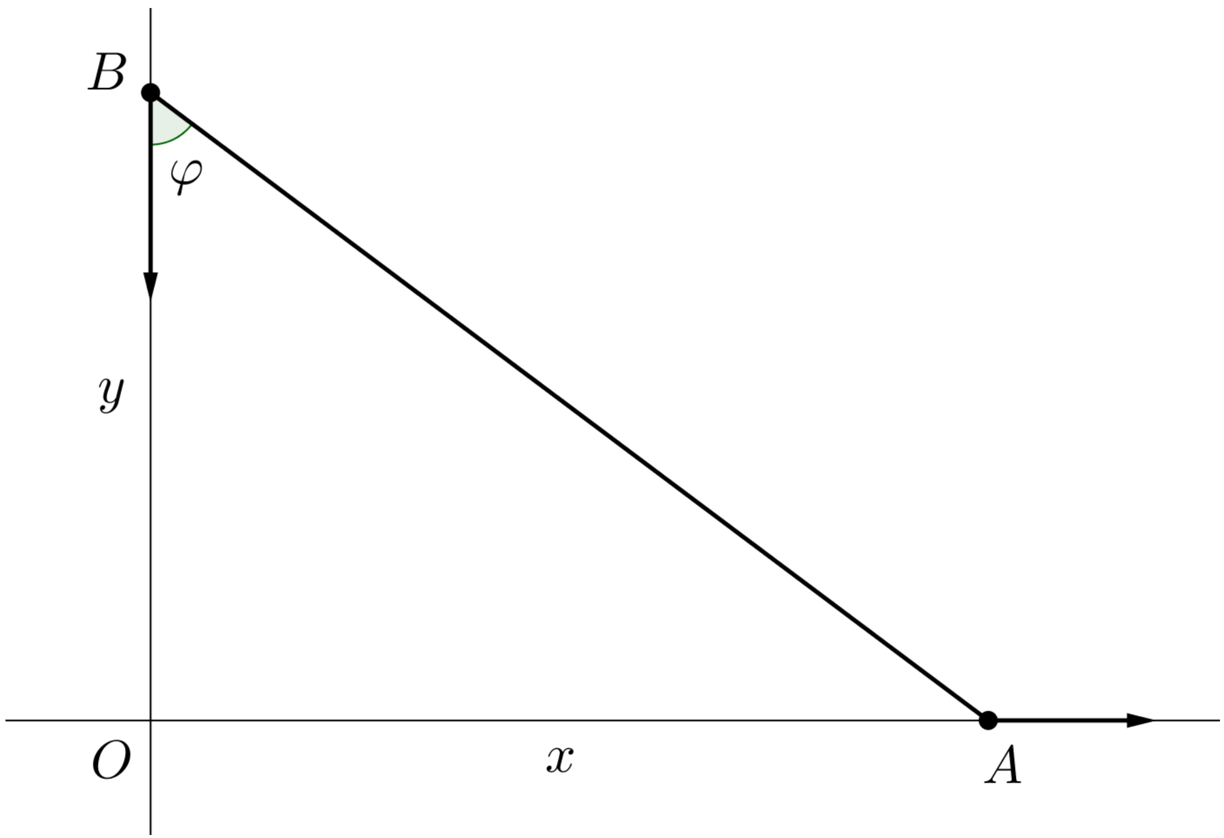
Una persona sta camminando verso destra lungo la retta orizzontale; quando passa dal punto P, distante 5 metri da O, la sua velocità è 3 m/s. Si determini la velocità (in rad/s) di variazione dell'angolo φ.



$$\varphi = \arctan\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad \varphi' = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x' = \frac{2\,x'}{x^2+4}$$

$$\varphi' = \frac{2\cdot 3}{5^2+4}\ \mathrm{rad/s} \quad\Rightarrow\quad \varphi' = \frac{6}{29}\ \mathrm{rad/s} \approx\ 0,21\ \mathrm{rad/s}$$

Nella figura è rappresentata una scala (AB) lunga 5 metri che sta scivolando appoggiata al muro. Sapendo che la velocità dell'estremo B sulla parete, quando si trova a 3 metri dal pavimento è di 2 m/s, qual è la velocità dell'estremo A che scorre orizzontalmente? Qual è, sempre nello stesso istante, la velocità di variazione dell'angolo φ ?



$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2\,x\,x' + 2\,y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = -\frac{y}{x}\,y'$$

$$\Rightarrow \quad x' = -\frac{3\text{ m}}{4\text{ m}} \cdot (-2\text{ m/s}) = 1,5\text{ m/s}$$

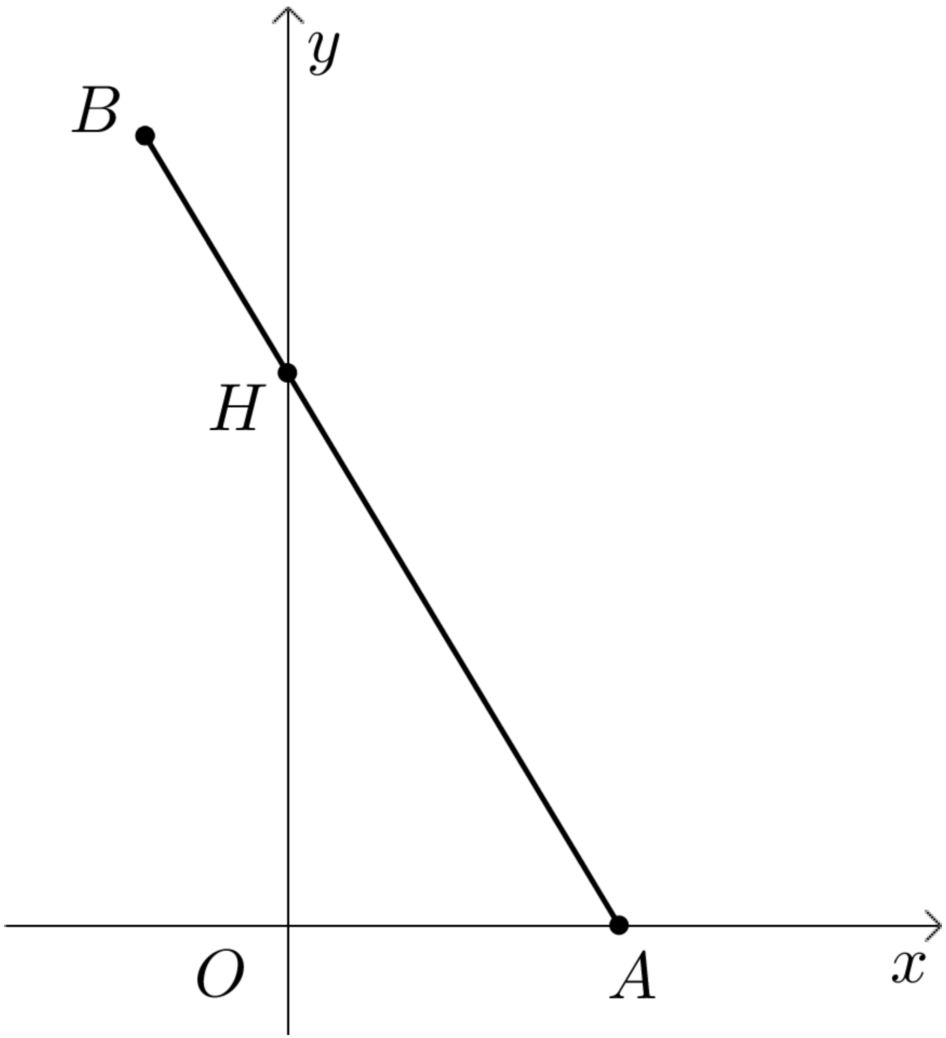
$$\tan\varphi = \frac{x}{y} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \arctan\frac{x}{y}$$

$$\varphi' = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{x'\,y - x\,y'}{y^2} =$$

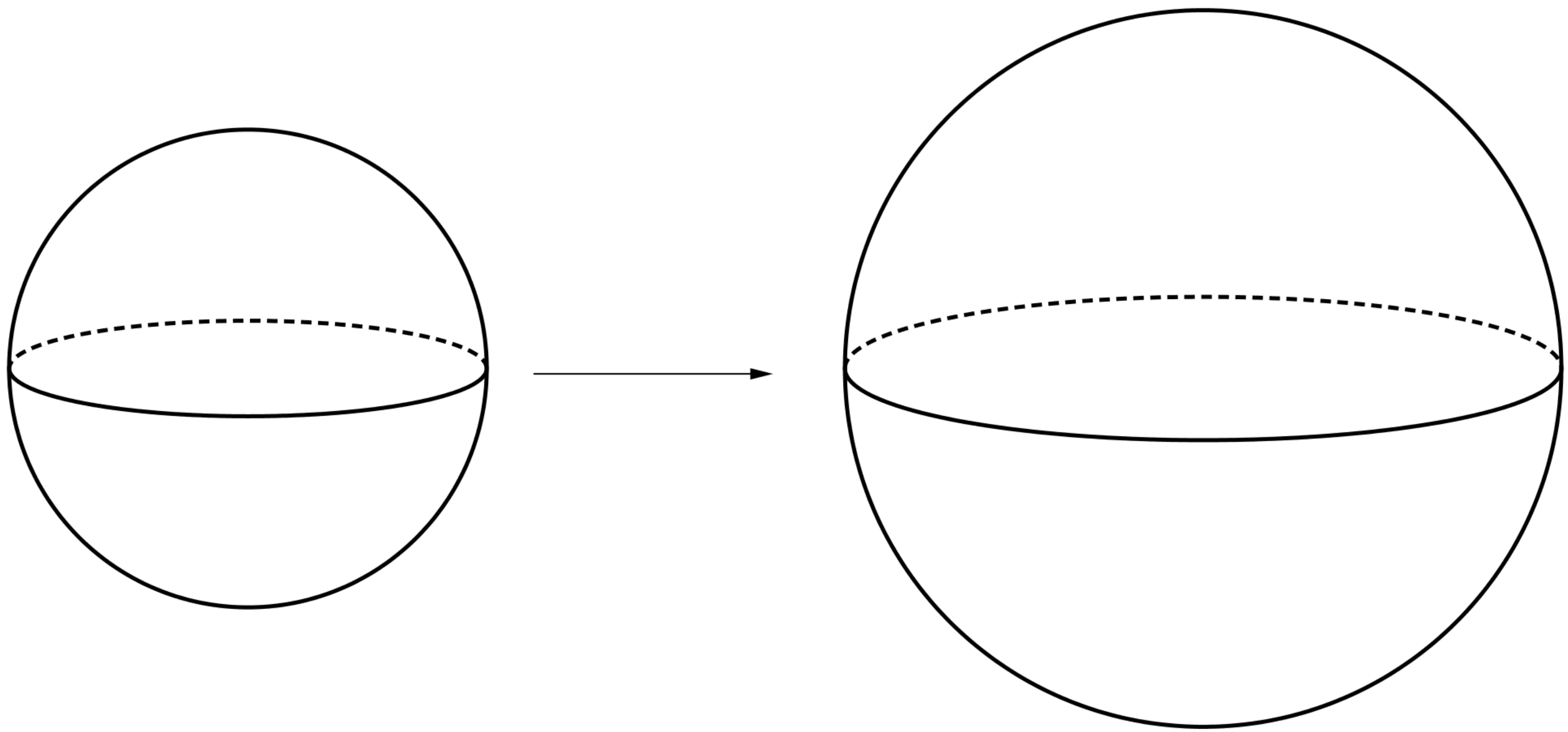
$$\frac{\cancel{y^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{x'\,y - x\,y'}{\cancel{y^2}} = \frac{x'\,y - x\,y'}{x^2+y^2}$$

$$\varphi' = \frac{1,5\cdot 3 - 4\cdot(-2)}{25}\ \mathrm{rad/s} = 0,5\ \mathrm{rad/s}$$

Facendo riferimento alla figura, si consideri un segmento di lunghezza L = 5 m, obbligata a passare dal punto H (0,3 m) ed avente il punto A sull'asse x. Se A si muove verso destra di moto rettilineo uniforme con velocità v = 2 m/s, si determinino le componenti della velocità dell'altro estremo B quando A si trova nella posizione x = 1,8 m.



Una sfera si sta gonfiando. Quando il raggio è 13 cm, la velocità con la quale sta crescendo il raggio è 2 cm/s. Qual è la velocità di crescita della superficie? Con quale velocità cresce il volume?



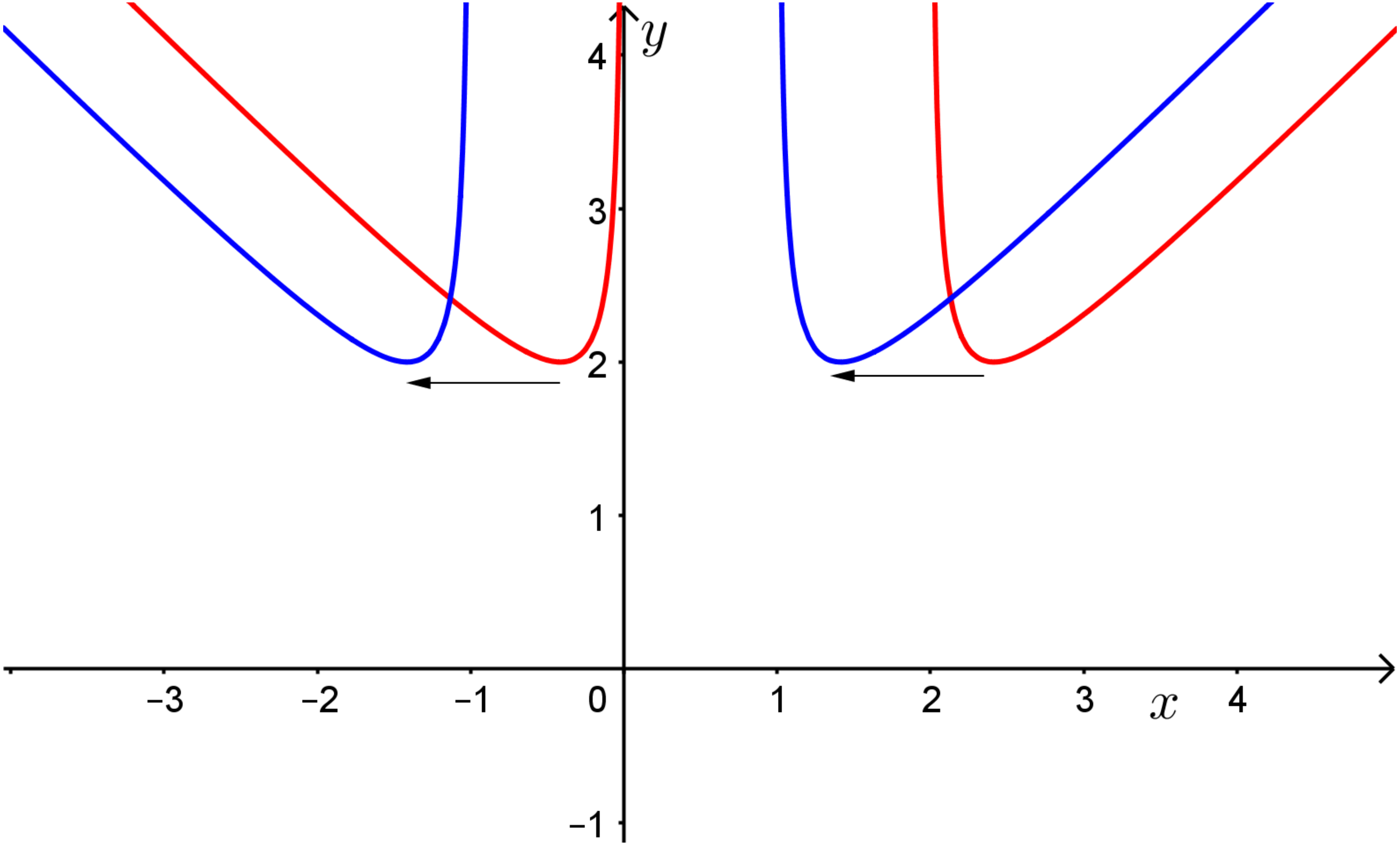
• Importanza delle trasformazioni del piano, in modo indipendente dal testo (lo studente dovrebbe essere in grado, da solo, di capire in quali casi utilizzarle).

Riconoscimento di opportune trasformazioni che semplificano il problema. Ad esempio, la curva

$$y = \frac{x^2 - 2\,x + 1}{\sqrt{x^2 - 2\,x}}$$

può essere riscritta, traslando a sinistra di 1, nella forma "più maneggevole"

$$Y = \frac{X^2}{\sqrt{X^2 - 1}}$$

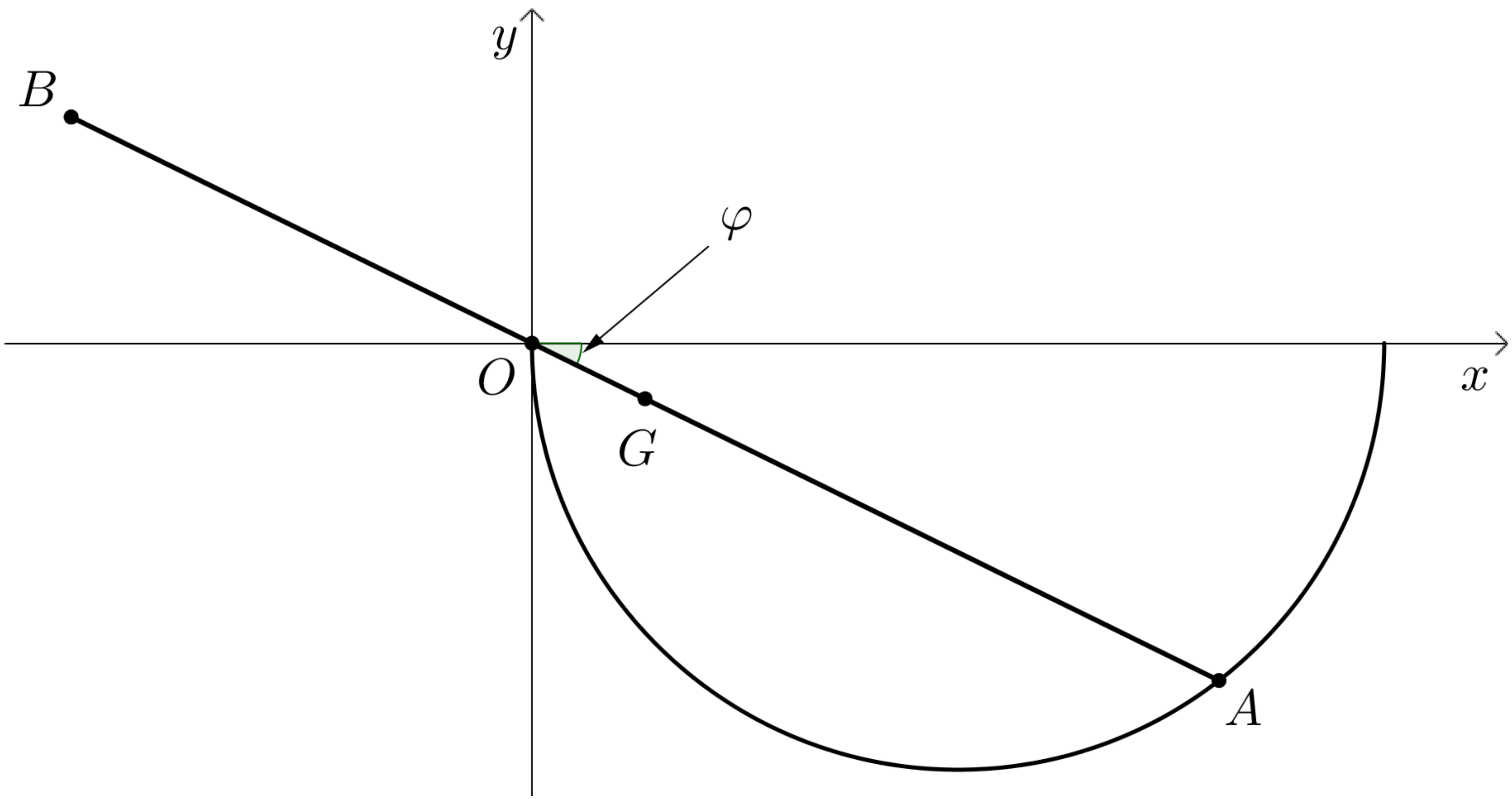


y
4
3
2
1
0
−1
−3
−2
−1
1
2
3
x
4

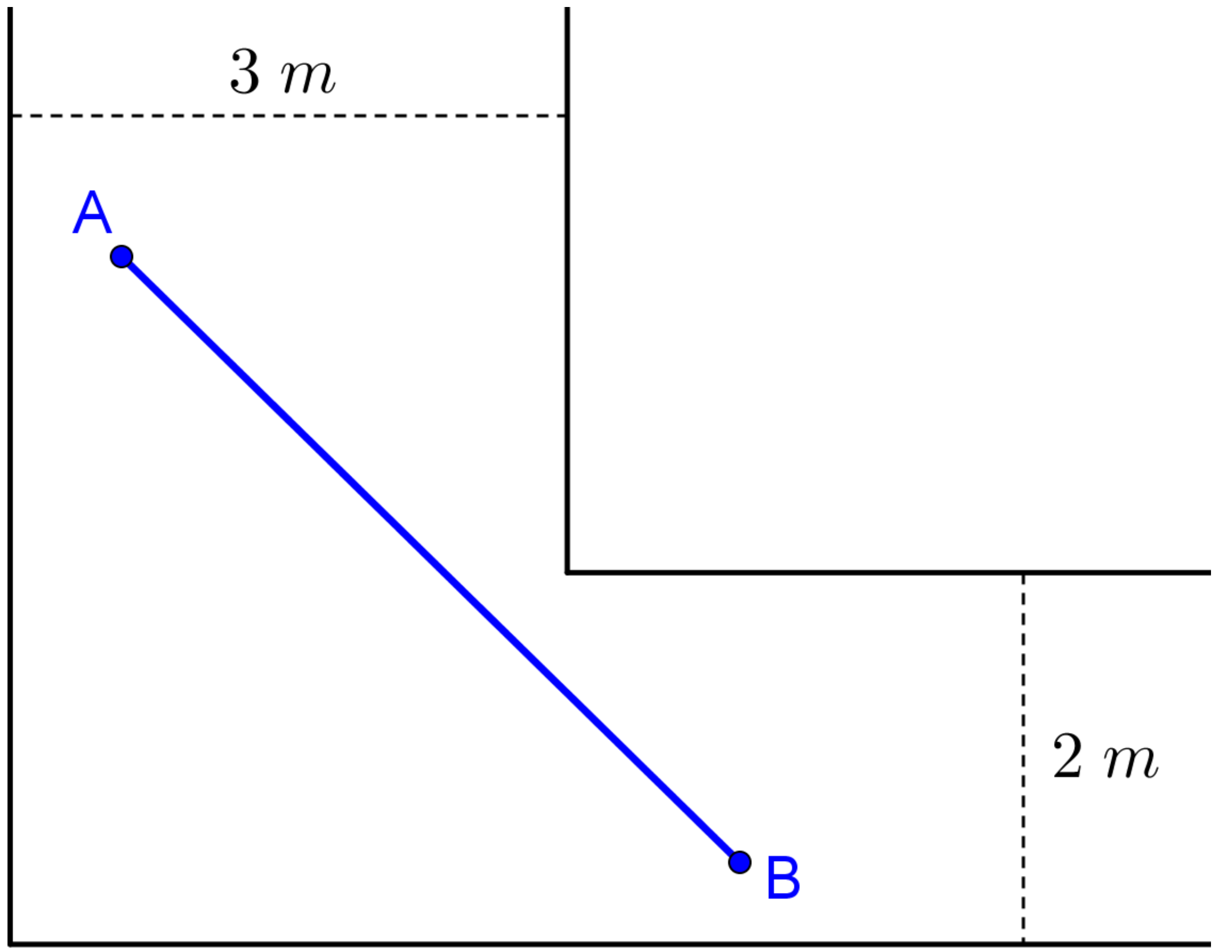
• Tutti i problemi di massimo e minimo (in qualsiasi contesto, "puro" oppure applicato) sono formativi. In particolare è bene che lo studente, in modo **indipendente**, capisca il problema, i casi particolari (compresi quelli eventualmente "patologici"), scelga un eventuale riferimento cartesiano, l'incognita (dandone in modo chiaro le limitazioni, descrivendo che cosa accade "al limite"), ecc.

La valutazione, per questa tipologia di problemi (e non solo!), dovrebbe tenere in considerazione tutti questi aspetti, cercando di valorizzare il grado di **autonomia** raggiunta dai singoli discenti.

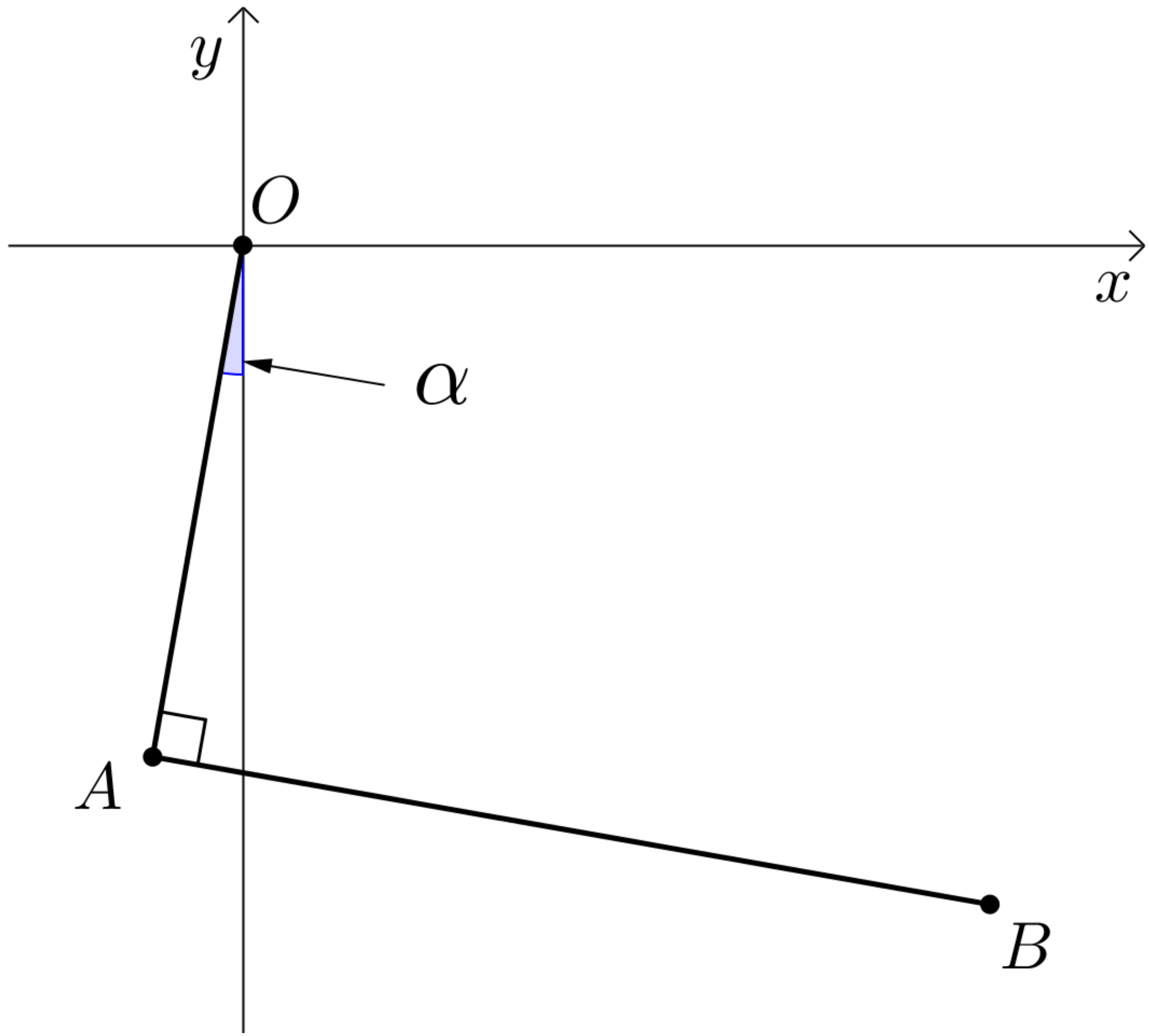
Si determini il punto più basso raggiunto dal baricentro della sbarra (omogenea) di lunghezza L = 6 m (il raggio del semicerchio è 2 m). Si determini poi il punto più a sinistra raggiunto dall'estremo B.

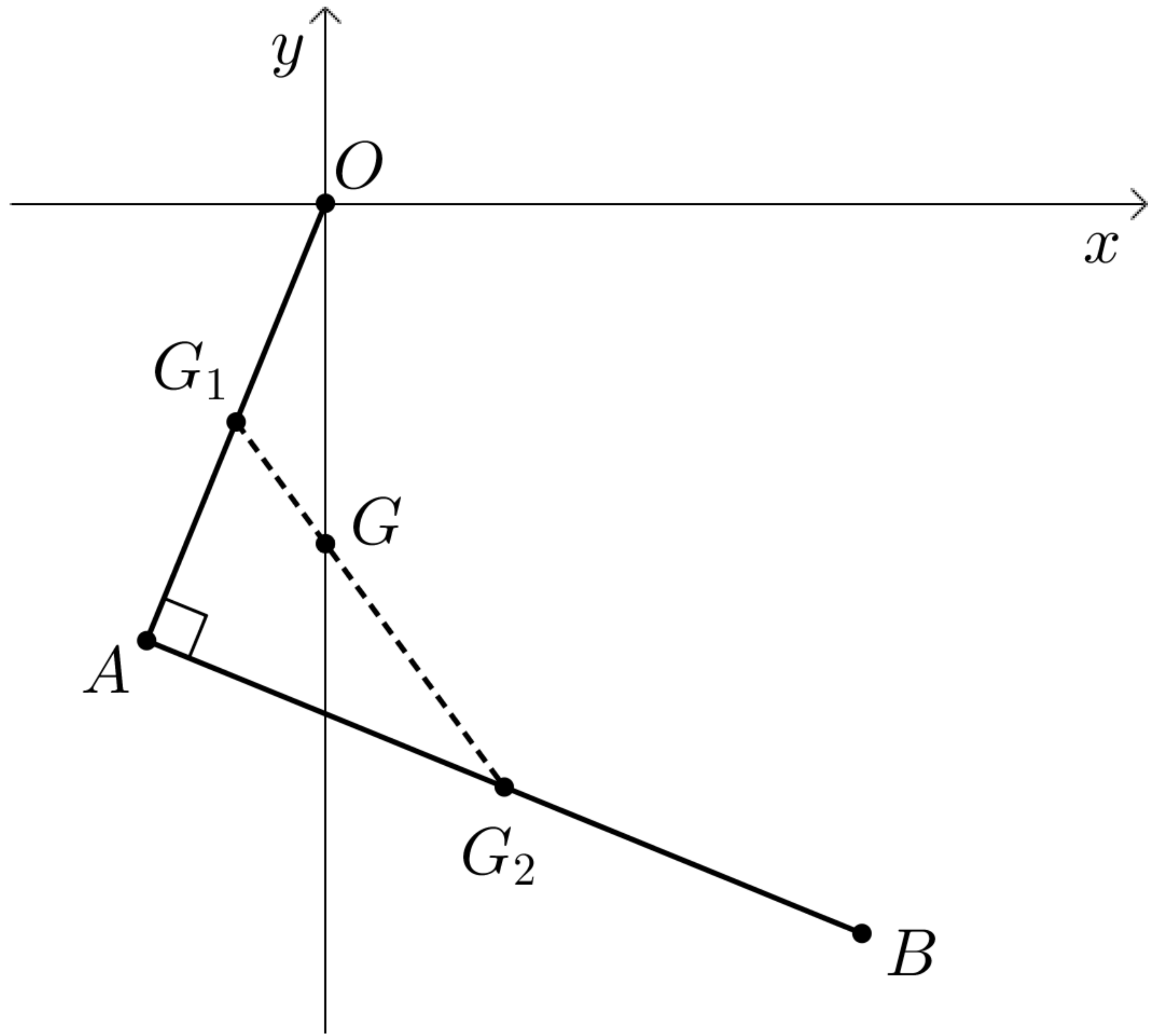


Qual è la massima lunghezza della sbarra AB affinché possa passare dal corridoio ad angolo retto?



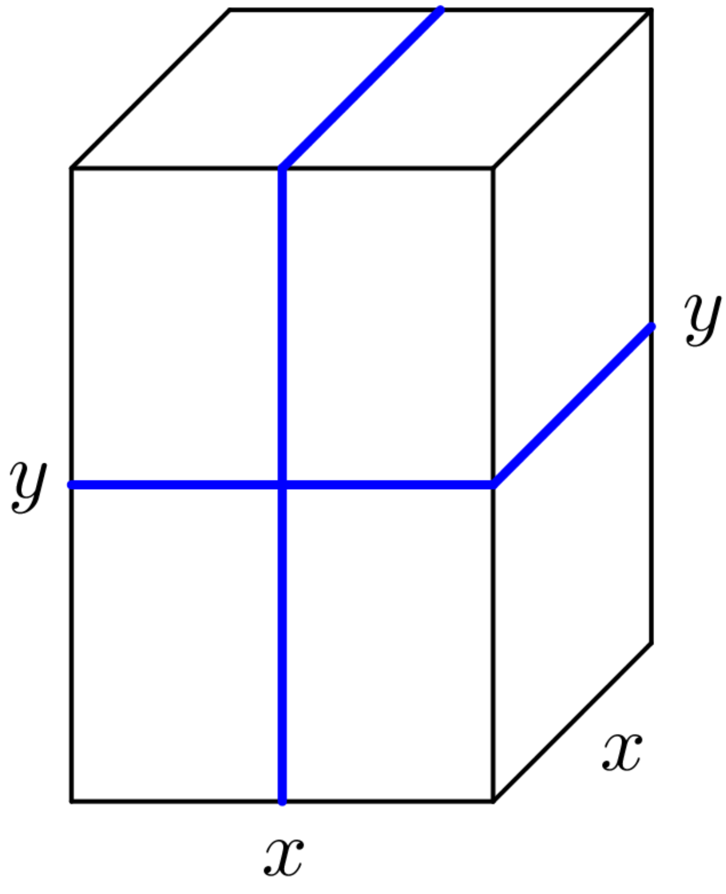
Si determini l'angolo α in modo che il sistema sia nella posizione di equilibrio. (Le sbarre hanno lunghezze e densità diverse).



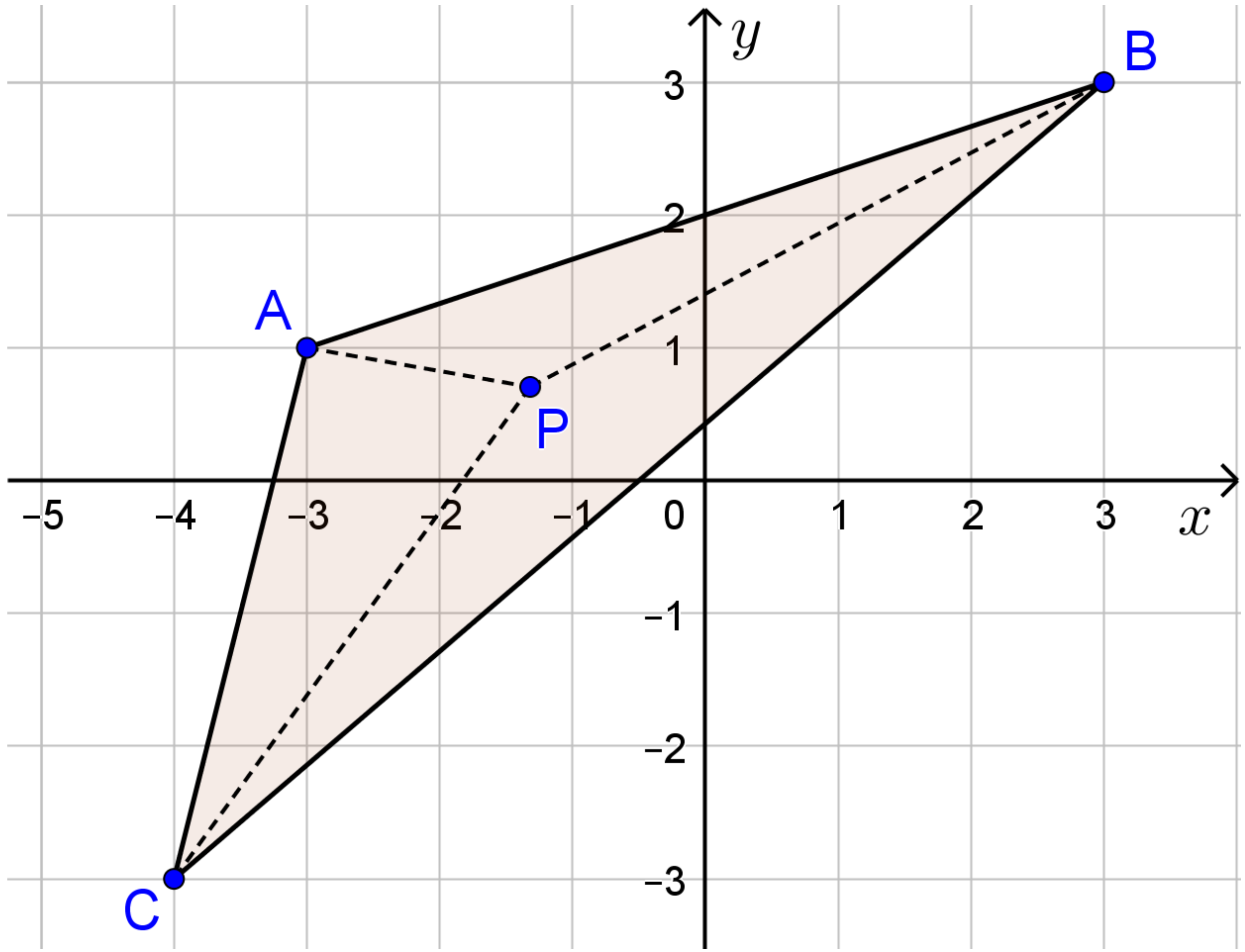


y
O
x
G1
G
A
G2
B

Facendo riferimento alla figura, qual è la scatola a forma di parallelepipedo rettangolo a base quadrata di **massimo volume** che possiamo impacchettare con uno spago di lunghezza totale uguale a L?



Punto P interno al triangolo ABC che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai vertici.



$$f(x) = (x+3)^2 + (y-1)^2 + (x-3)^2 + \\ +(y-3)^2 + (x+4)^2 + (y+3)^2$$

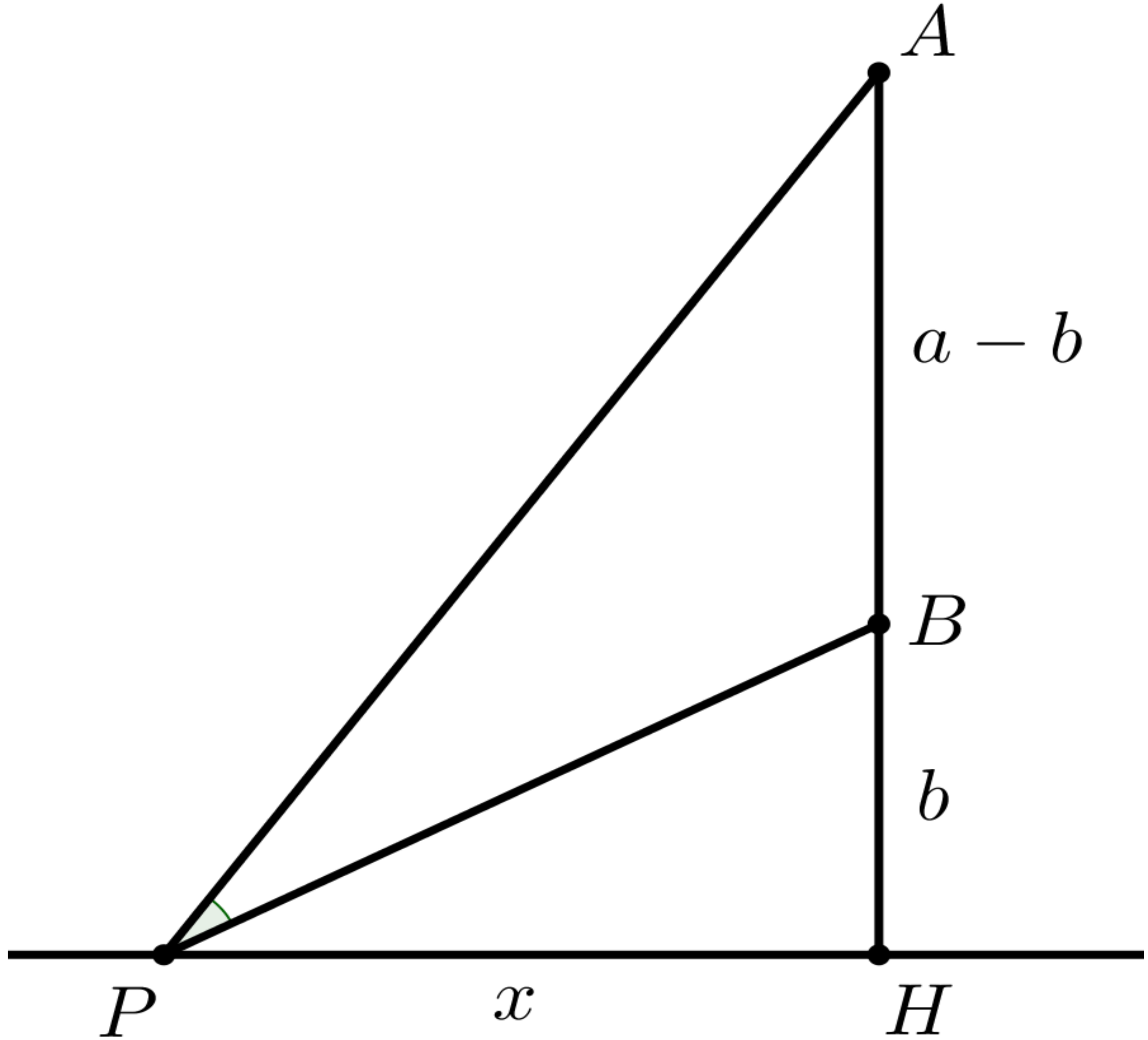
$$f(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 3\,y^2 - 2\,y + 53$$

il minimo si ottiene minimizzando separatamente

$$f_1(x) = 3\,x^2 + 8\,x \qquad f_2(x) = 3\,y^2 - 2\,y$$

$$x_P = -\frac{4}{3} \quad ; \quad y_P = \frac{1}{3}$$

Problema di Regiomontano: si trovi x in modo da rendere massimo l'angolo APB.



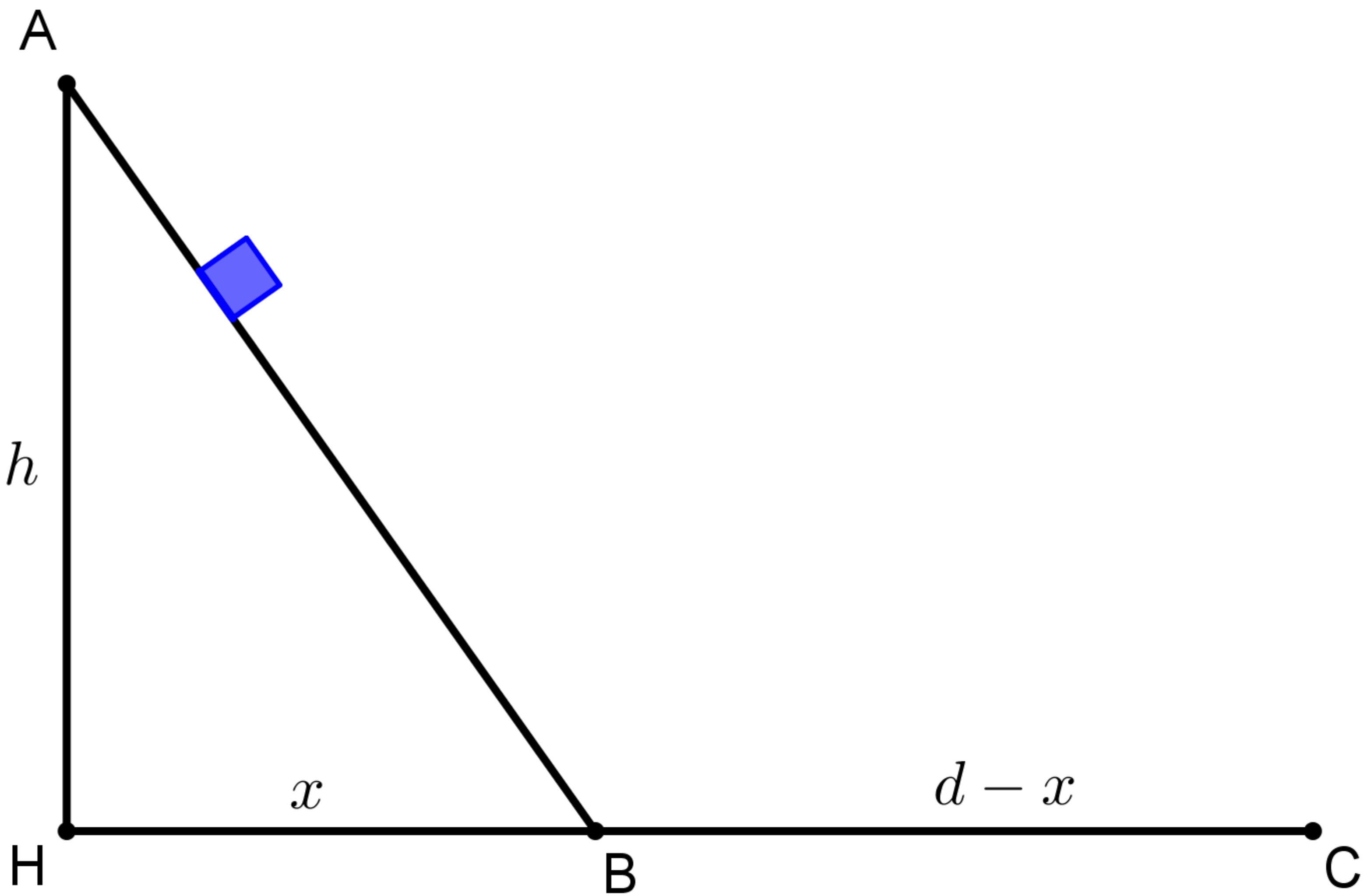
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{b}{x}} = \frac{(a-b)x}{x^2+a\,b} = \frac{(a-b)}{x+\dfrac{a\,b}{x}}$$

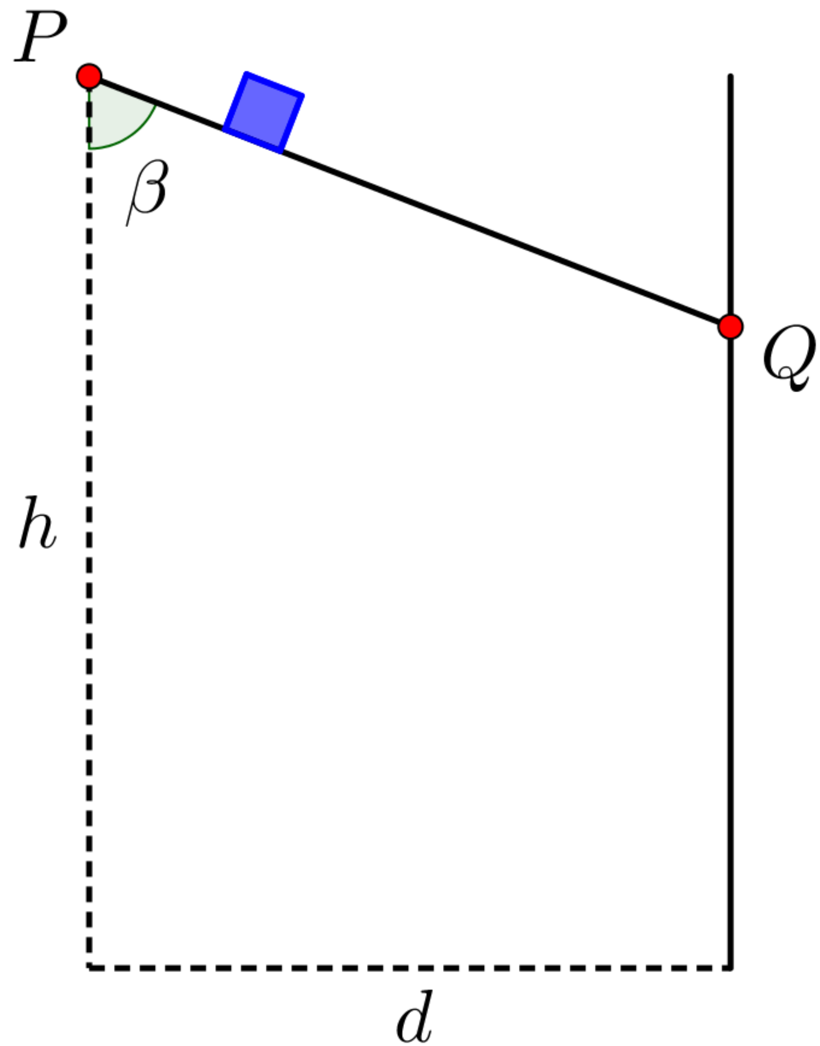
Poiché $x+\dfrac{a\,b}{x} = \left(\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{a\,b}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{a\,b}$

il minimo si ottiene quando $x=\sqrt{a\,b}$

Determinare x in modo che il corpo, partendo dal punto A, raggiunga il punto C **nel minor tempo possibile.**



Si determini l'angolo β in modo che un punto materiale che viene abbandonato in P, percorra il segmento di estremi P e Q **nel minor tempo possibile.**



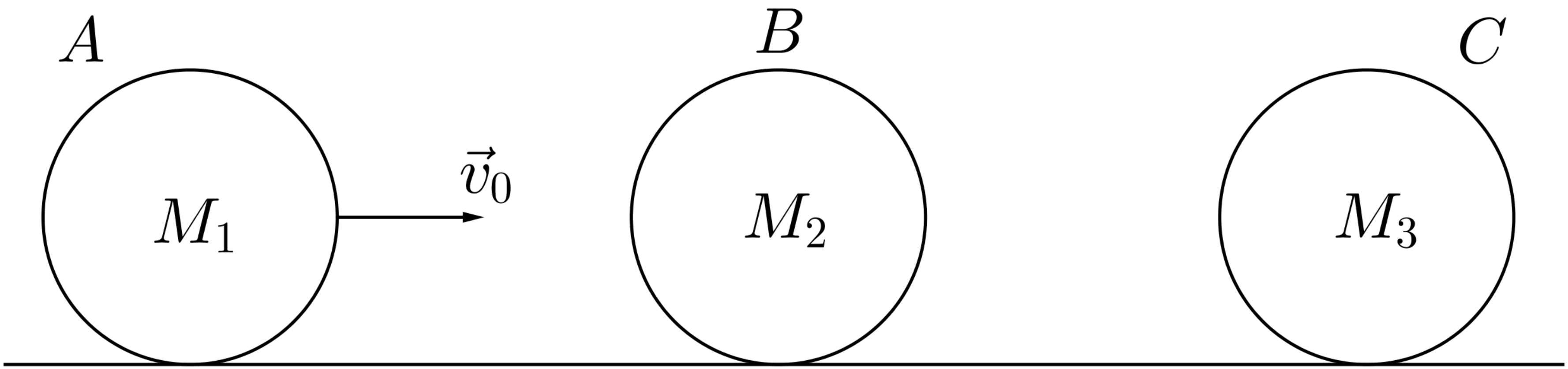
$$\frac{1}{2}\, g\ \cos\beta\, t^2 = \frac{d}{\sin\beta}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\, d}{g\ \sin\beta\ \cos\beta}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\, d}{g}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin(2\,\beta)}}$$

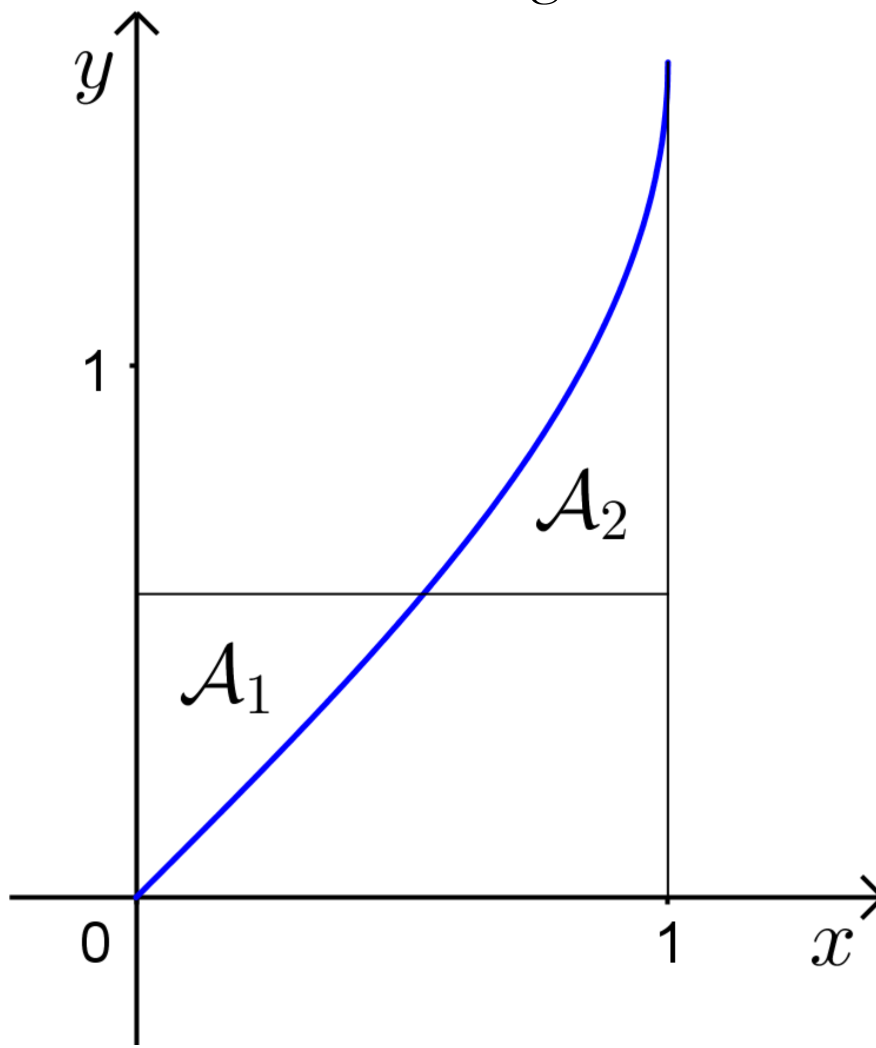
il minimo si raggiunge quando $\beta = \dfrac{\pi}{4}$

I centri di tre sfere A, B, C si trovano su una stessa retta. La sfera A urta contro la sfera B, la quale a sua volta va a urtare con una certa velocità contro la sfera C. Note le masse di A e C, quale deve essere la massa della sfera B **affinché la sfera C abbia velocità massima?** Gli urti sono perfettamente elastici.

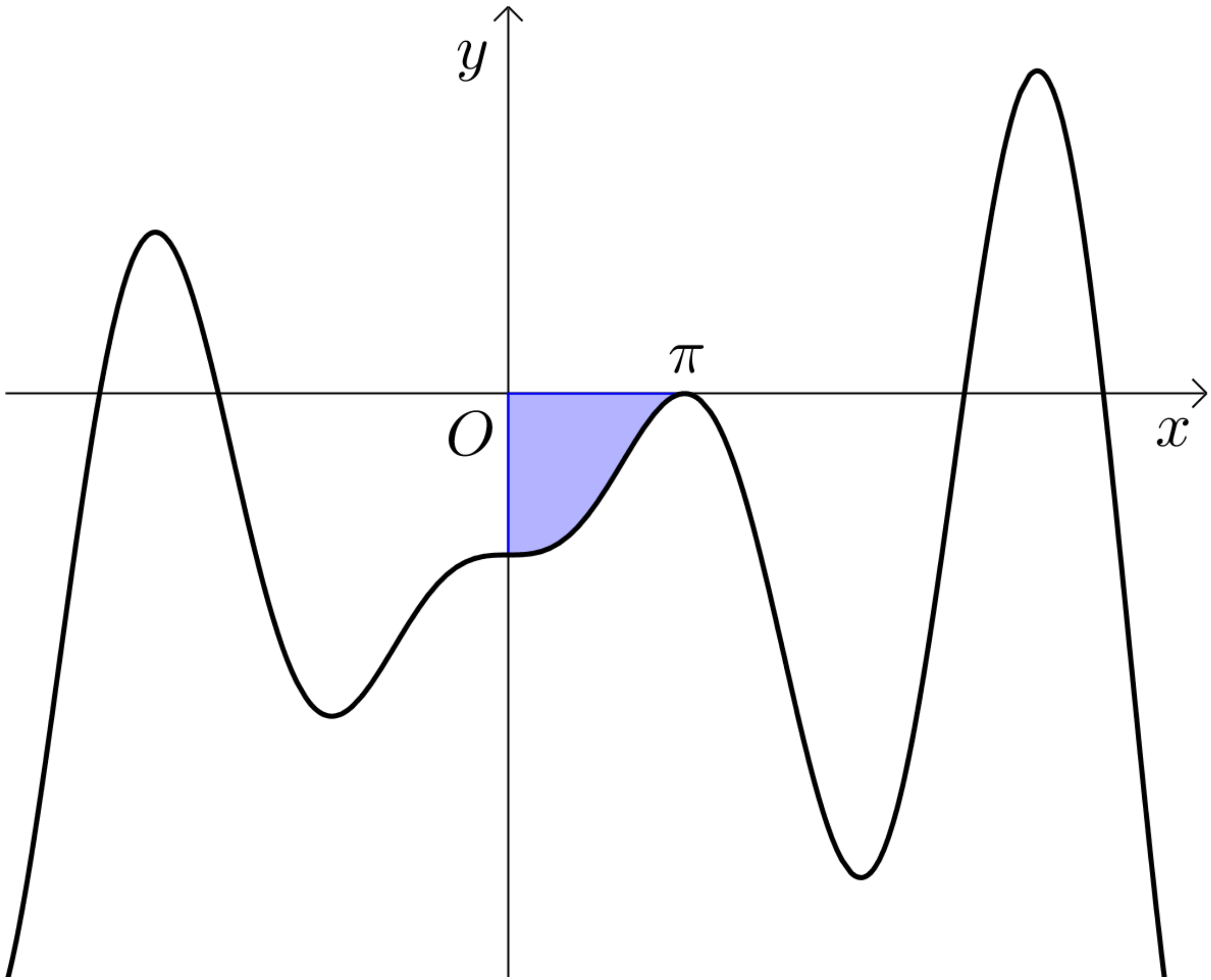


• Esercizi sugli **integrali**. Negli ultimi anni uno dei due problemi ha avuto come oggetto la funzione integrale. Da novità assoluta (o quasi) siamo passati ormai a una situazione "standard": i docenti e gli studenti, in questi ultimi anni, si aspettano un problema di taglio teorico su questo argomento.

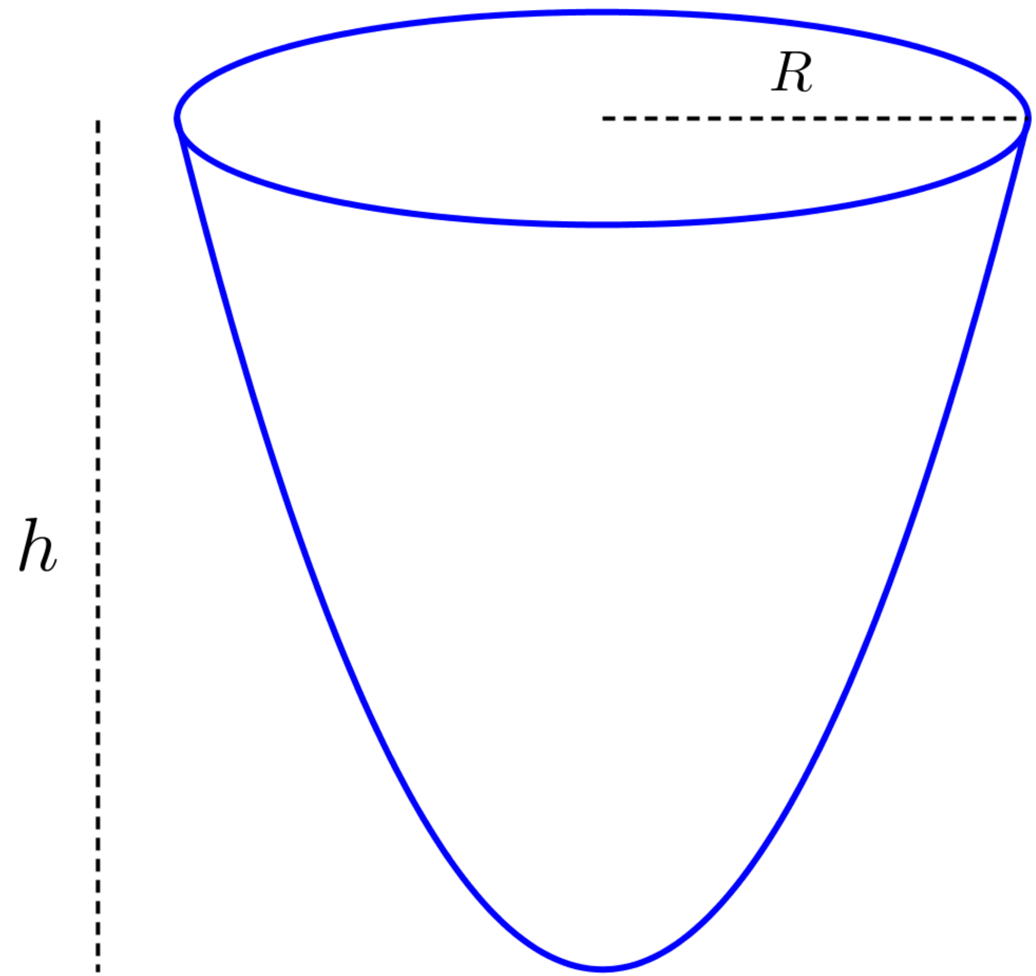
Dato il grafico della funzione $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$ con 0<x<1, si determini l'ordinata dei punti del segmento orizzontale in modo che le due aree raffigurate siano uguali.

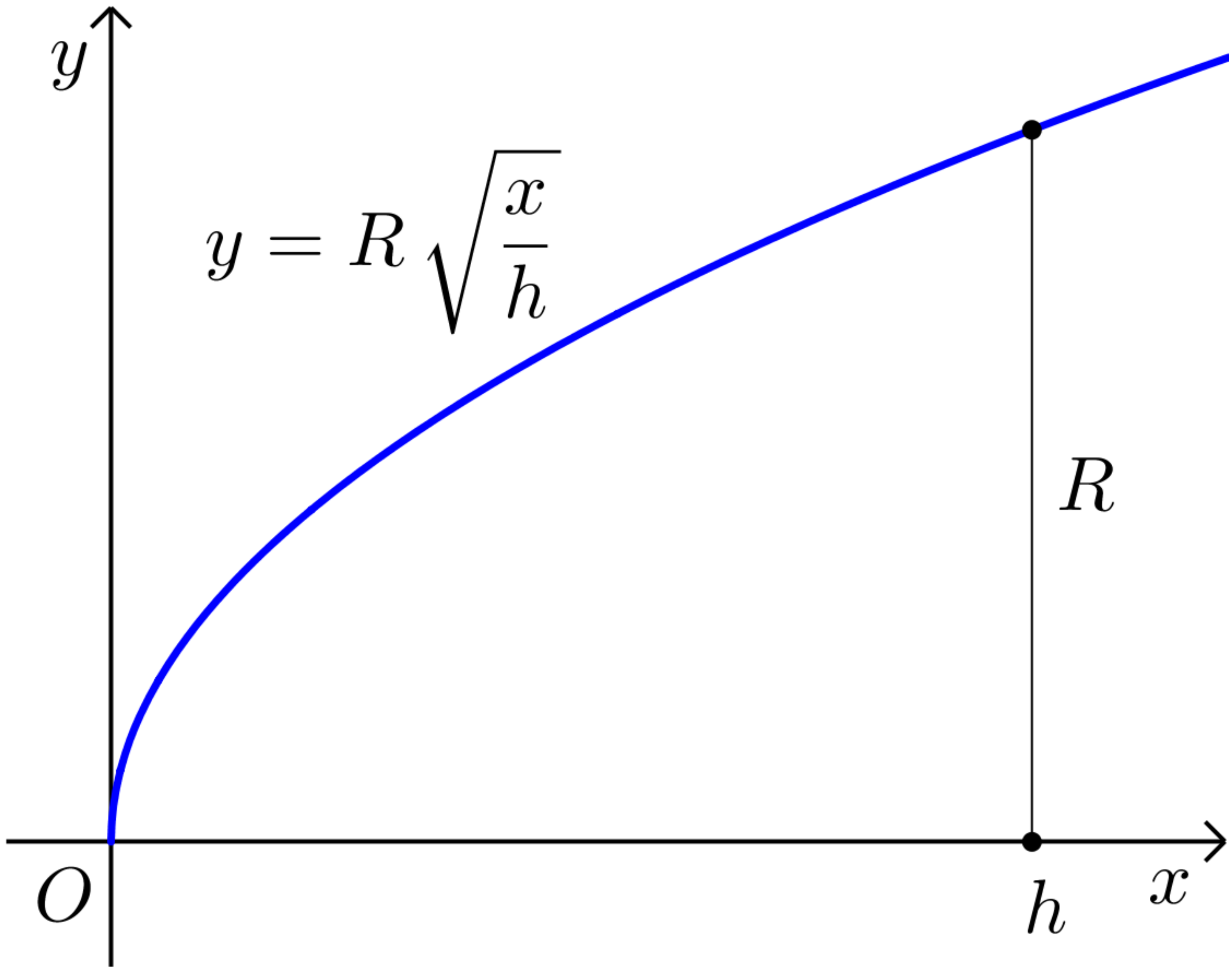


Nella figura sottostante è rappresentata una primitiva della funzione $f(x) = x \sin x$. Si determini l'area della regione di piano colorata.



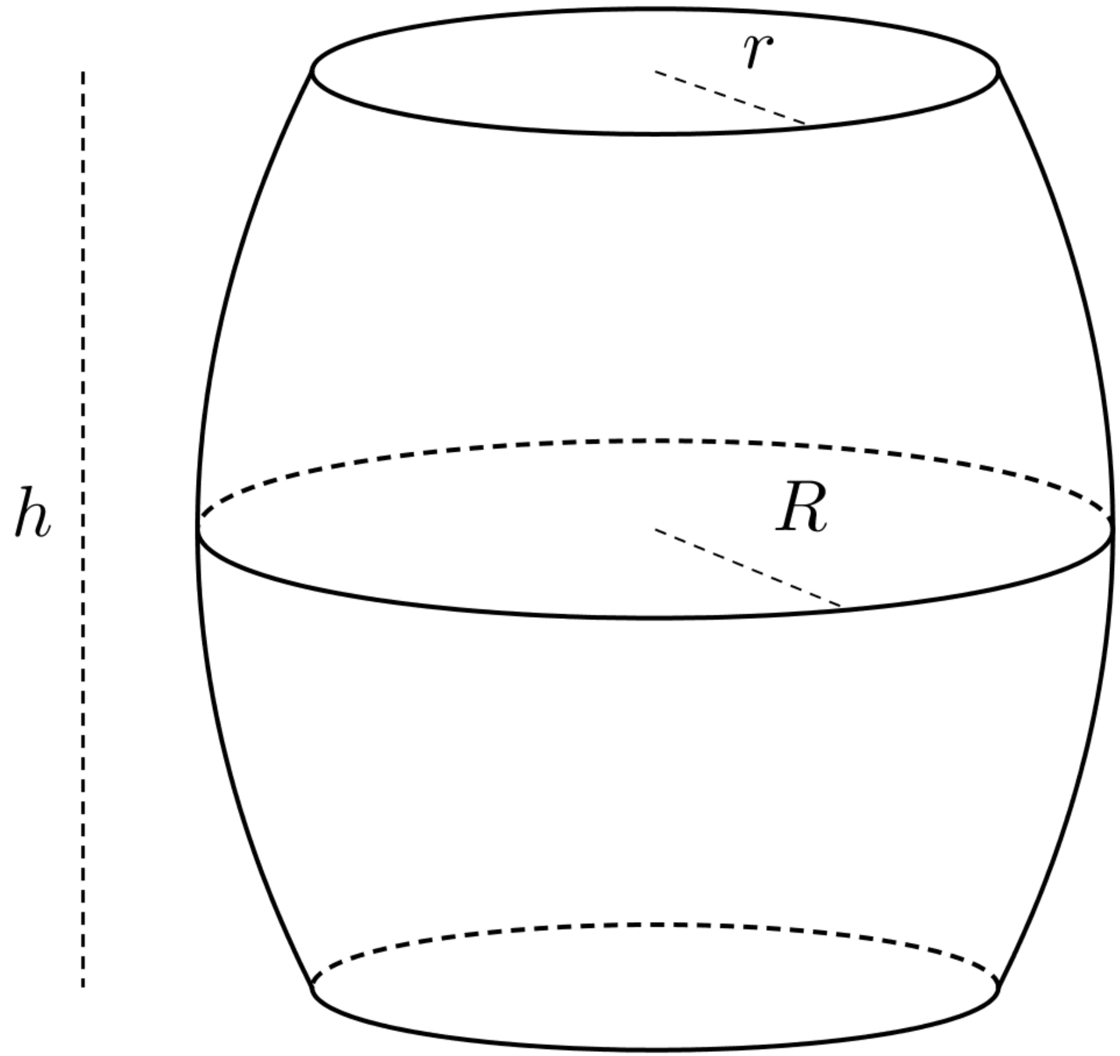
Si determini il volume del paraboloide.

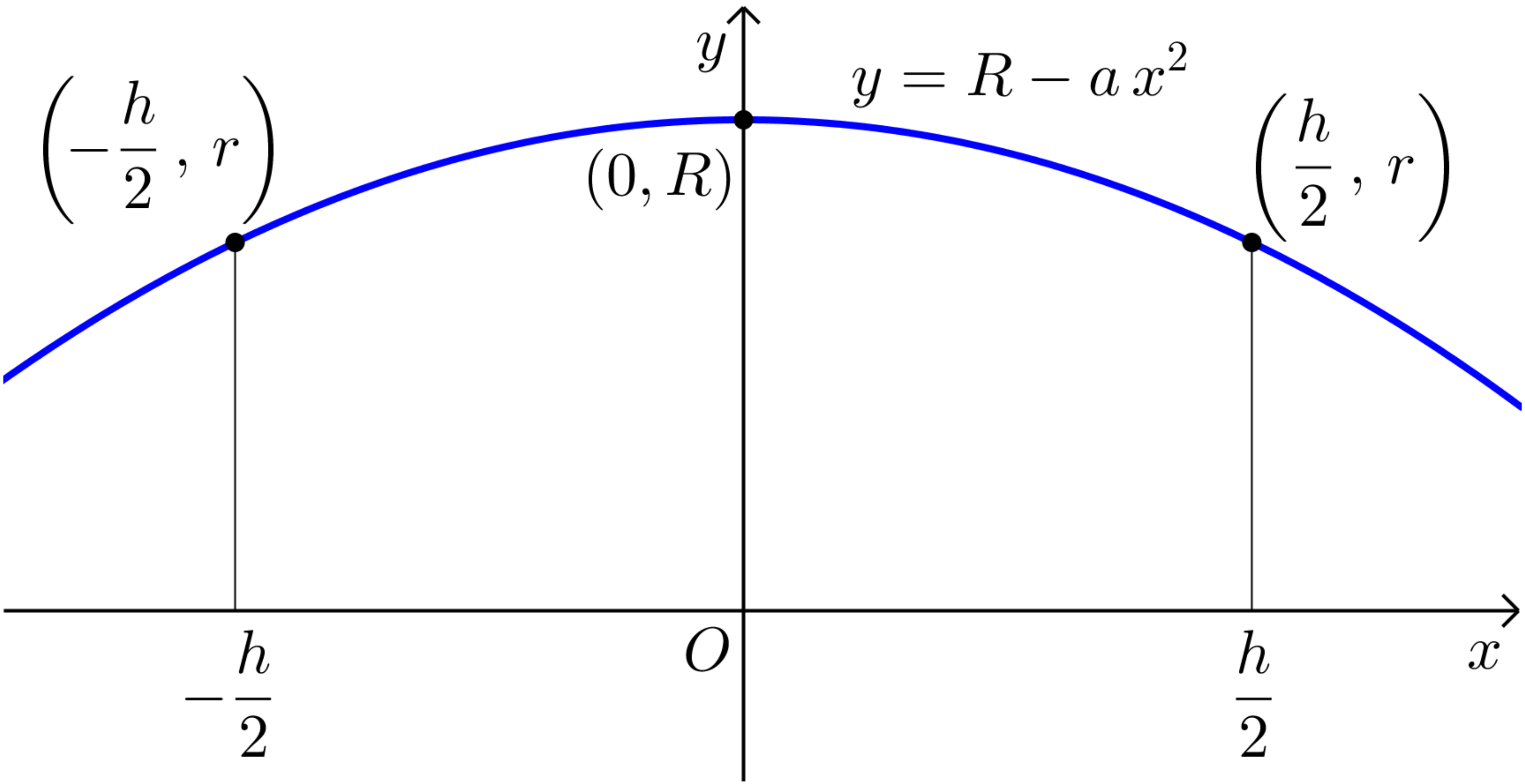




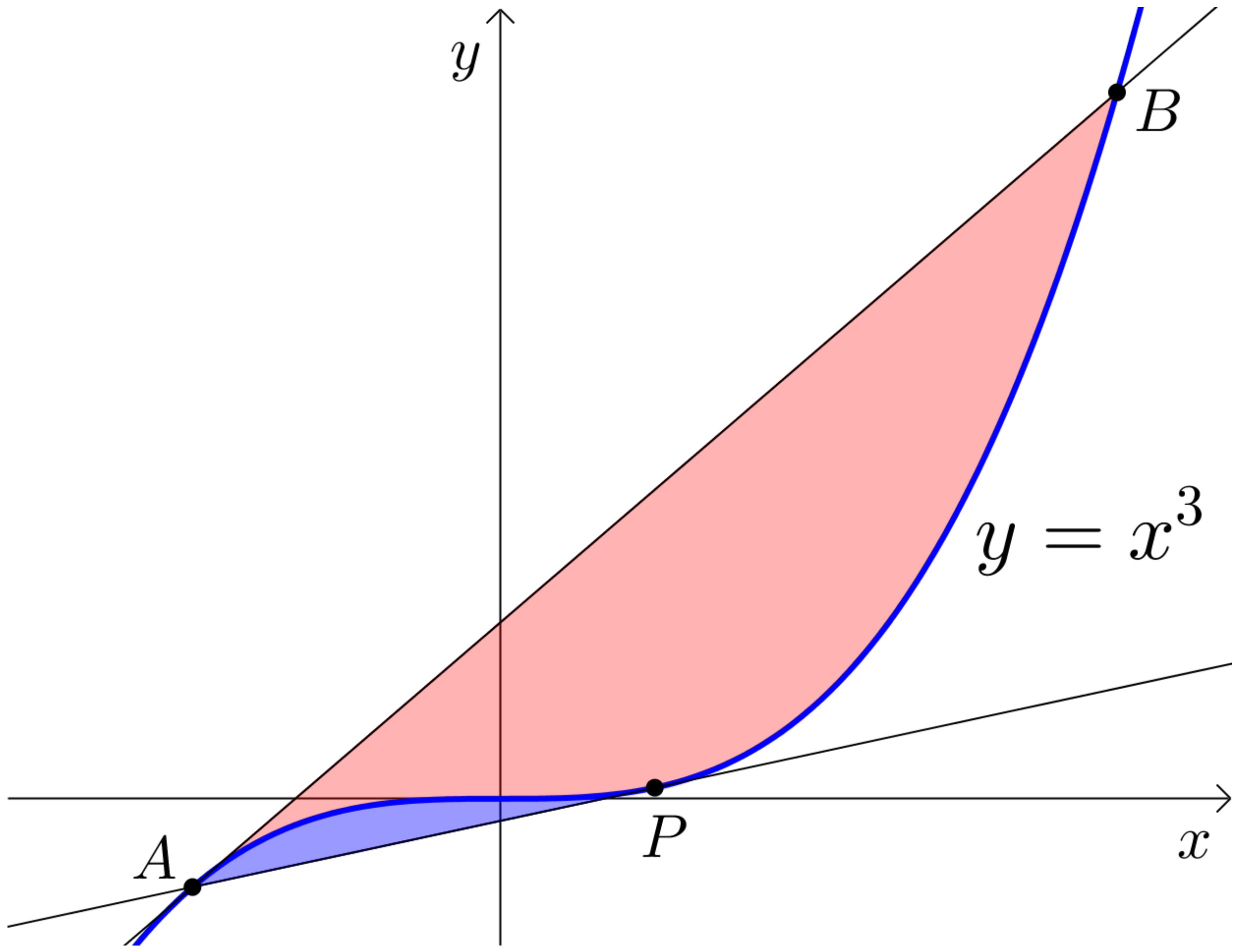
y
$y = R\sqrt{\frac{x}{h}}$
R
O
h
x

Determinare il volume di una botte, il cui profilo è parabolico.




y
$y = R - a\,x^2$
$\left(-\frac{h}{2}\,,\ r\right)$
$(0, R)$
$\left(\frac{h}{2}\,,\ r\right)$
O
x
$-\frac{h}{2}$
$\frac{h}{2}$

Dimostrare che, indipendentemente dal punto P della cubica, la regione di piano in alto ha un'area pari a 16 volte quella della regione in basso.



• Applicazioni alla Fisica

Importanti anche le applicazioni dell'analisi alla Fisica. Si è parlato tanto della prova di Fisica in questi ultimi anni…

- Campo elettrico di un disco carico uniformemente.

- Campo elettrico di una sfera con densità di carica volumetrica, variabile con la distanza dal centro della sfera.

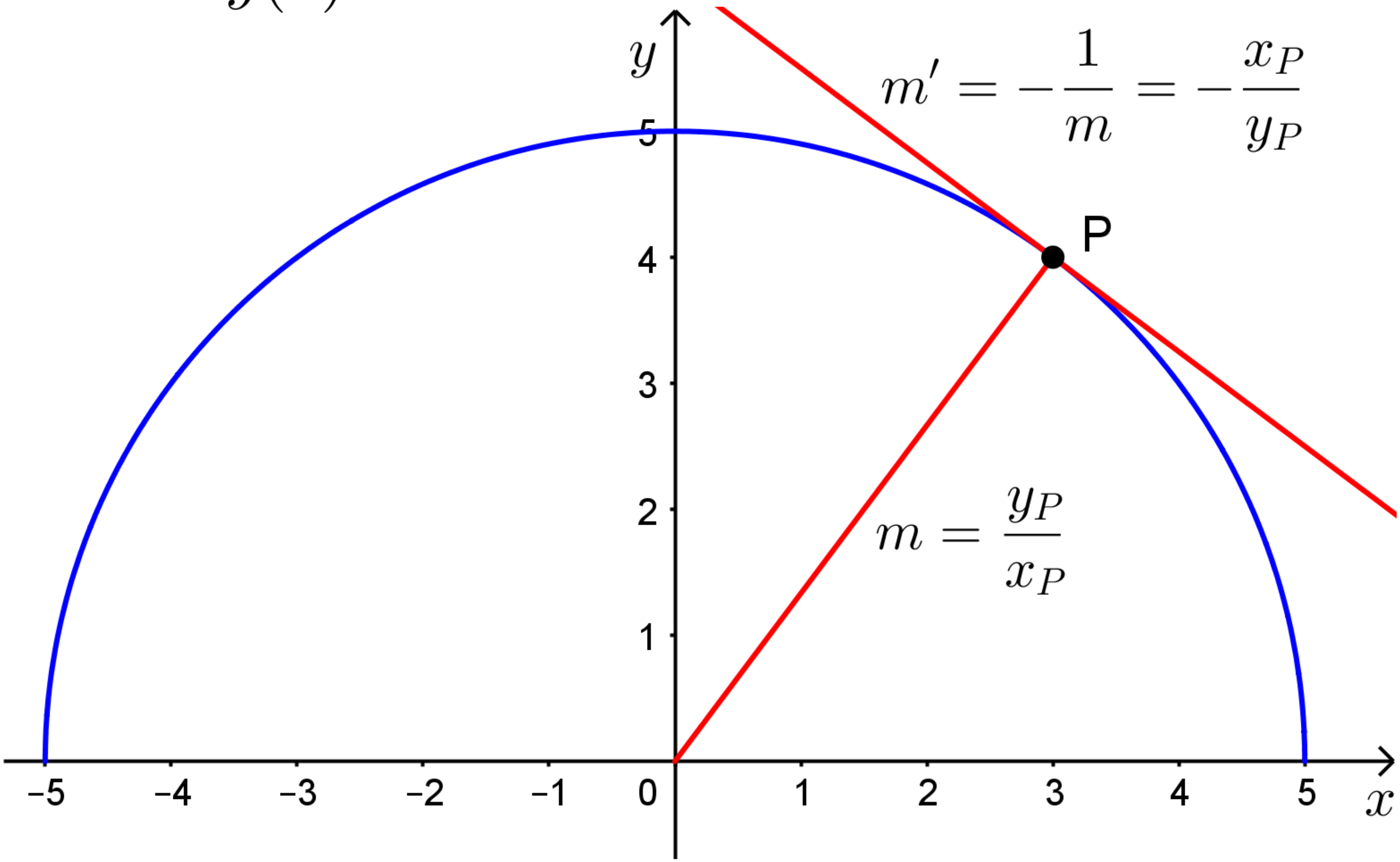
- Flusso del campo magnetico generato da un filo infinito percorso dalla corrente i attraverso un rettangolo appartenente ad un piano contenente il filo.

• Le ***equazioni differenziali***, la risposta che da secoli la matematica offre a svariati fenomeni naturali, possono offrire agli studenti quell'interesse all'analisi matematica che non possono dare complicati limiti o "improbabili" grafici (le Indicazioni Nazionali raccomandano di "*evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi*") lo studente può apprezzare, tramite semplici equazioni differenziali, la potenza degli strumenti matematici nella descrizione della natura.

Puntare insomma su **modelli matematici reali**, senza "forzature".

Si determini $y' = -\dfrac{x}{y}$

e tale che $y(3) = 4$. Si tratta della semicirconferenza…



- Si stabilisca se esiste una funzione che risolva l'equazione differenziale

$$y' = -y\,\sin x + \sin 2\,x$$

ed il cui grafico sia tangente alla retta di equazione

$$y = -x + 3\,\pi$$

nel suo punto di ascissa $x = \dfrac{\pi}{2}$.

- Si determini la soluzione dell'equazione differenziale

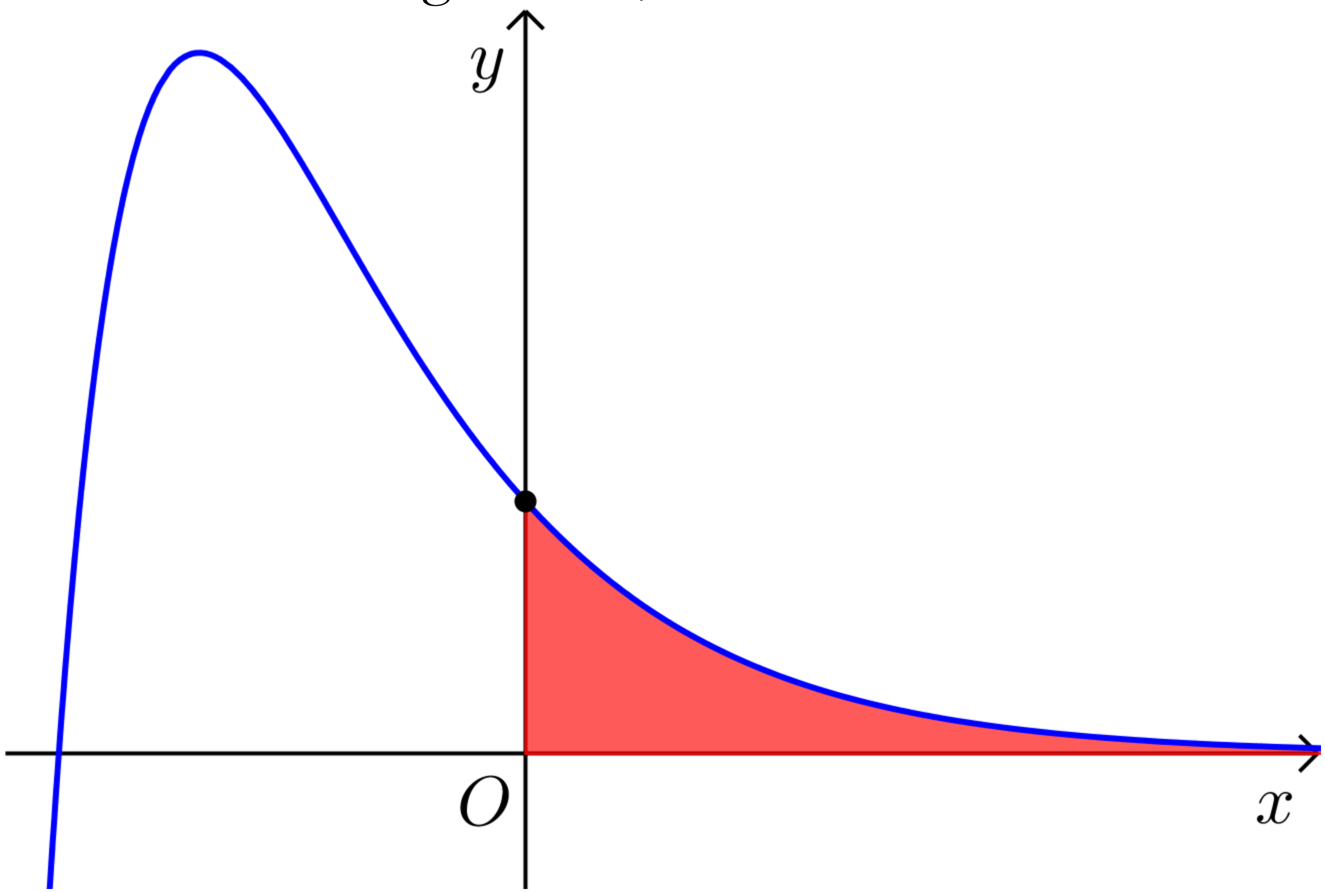
$$x^3\,y' = y^3$$

che ha come asintoto orizzontale sinistro la retta $y = 4$.

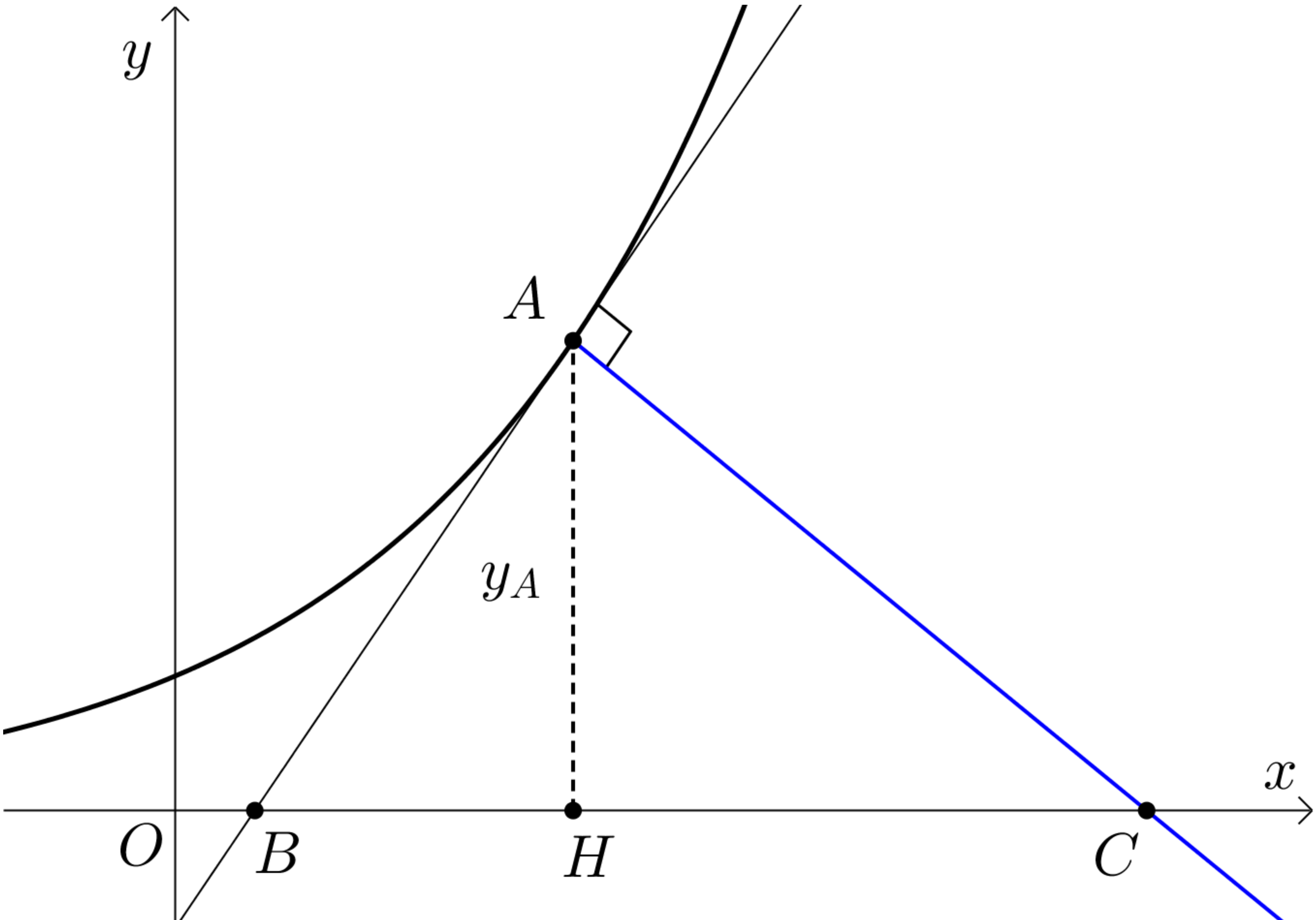
Determinare, tra le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = -2\,y + e^{-x}$$

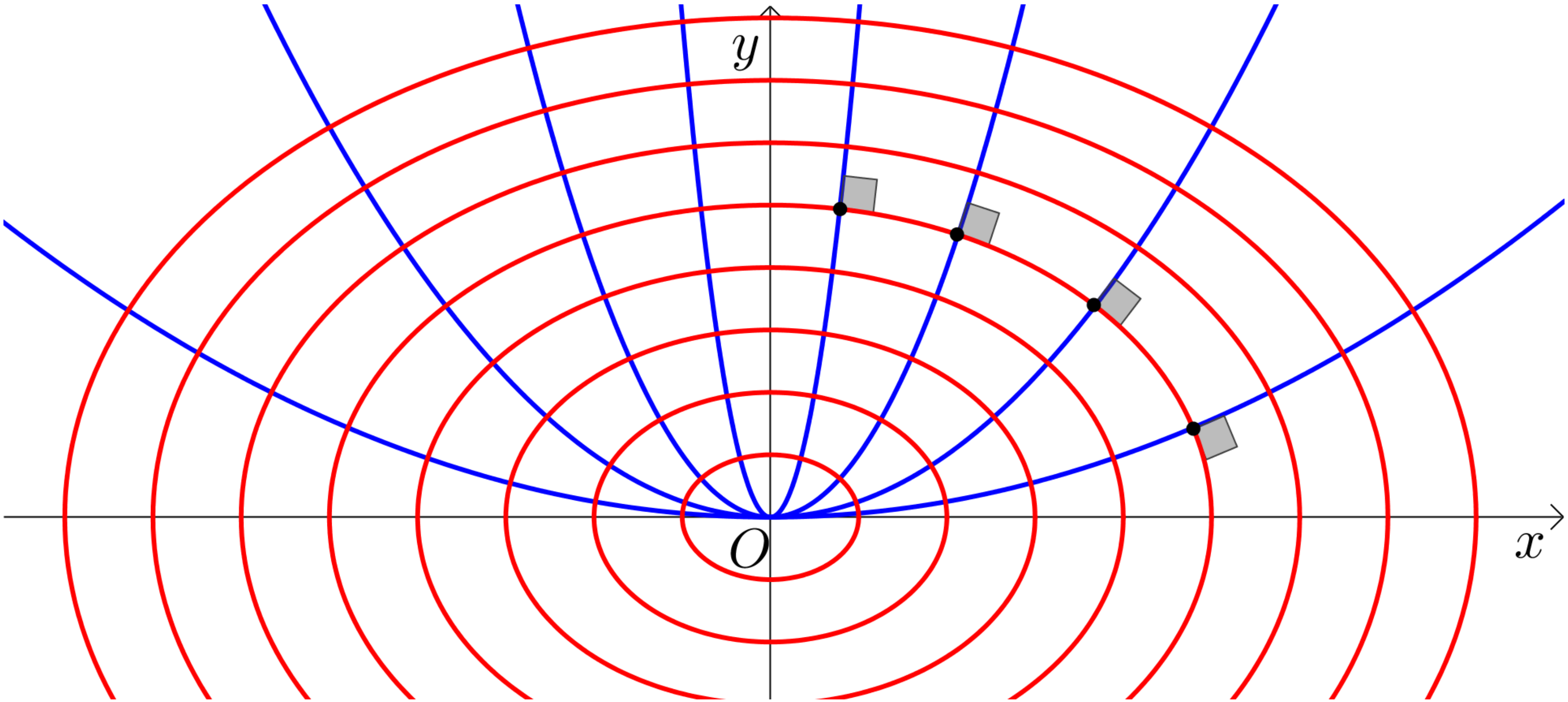
quella per cui l'area della regione illimitata delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani sia uguale a 0,95.

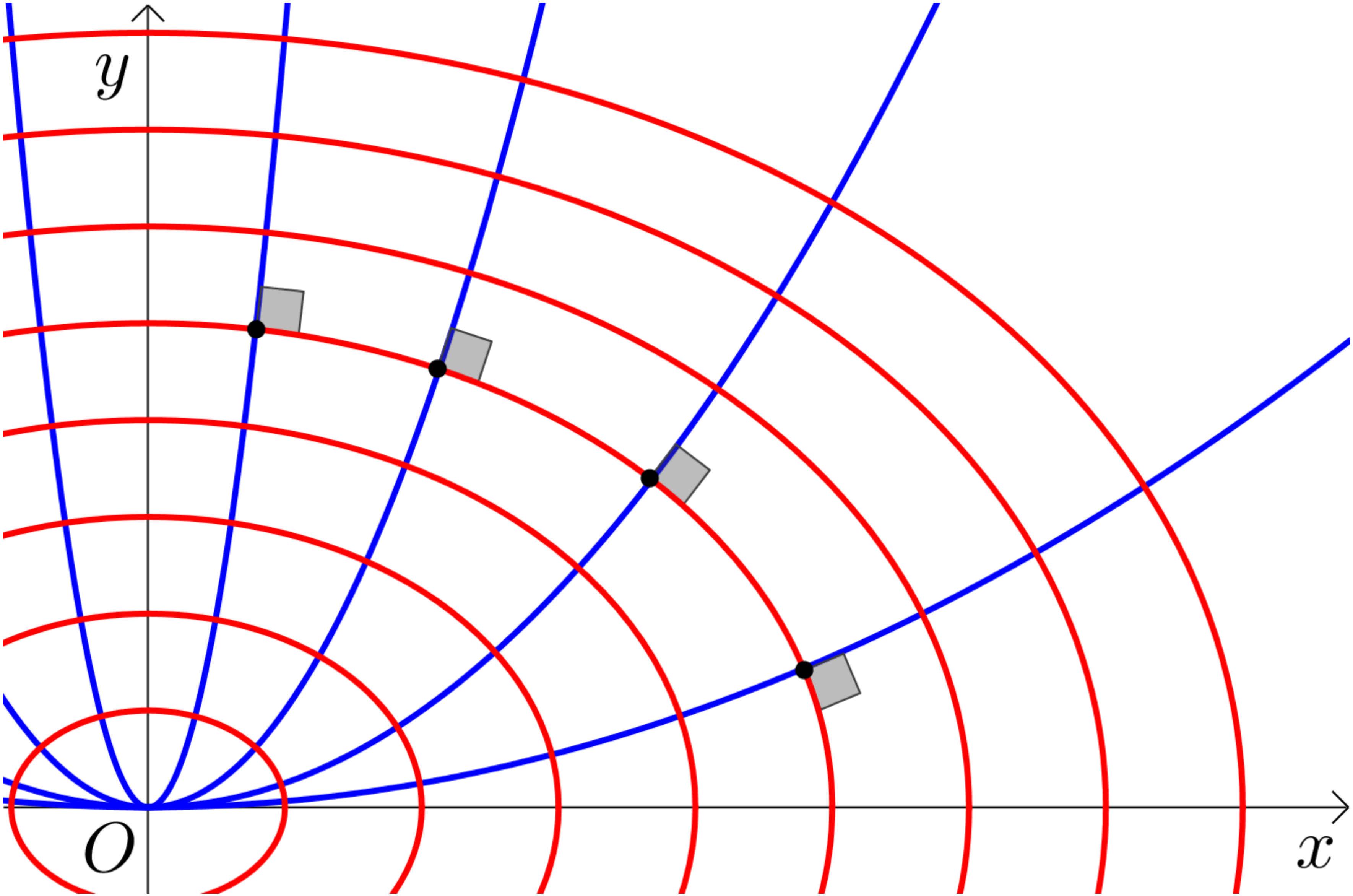


Determinare le curve con **sottonormale** HC costante.



Determinare le curve ortogonali al fascio di parabole con vertice in O e simmetriche rispetto all’asse delle ordinate.





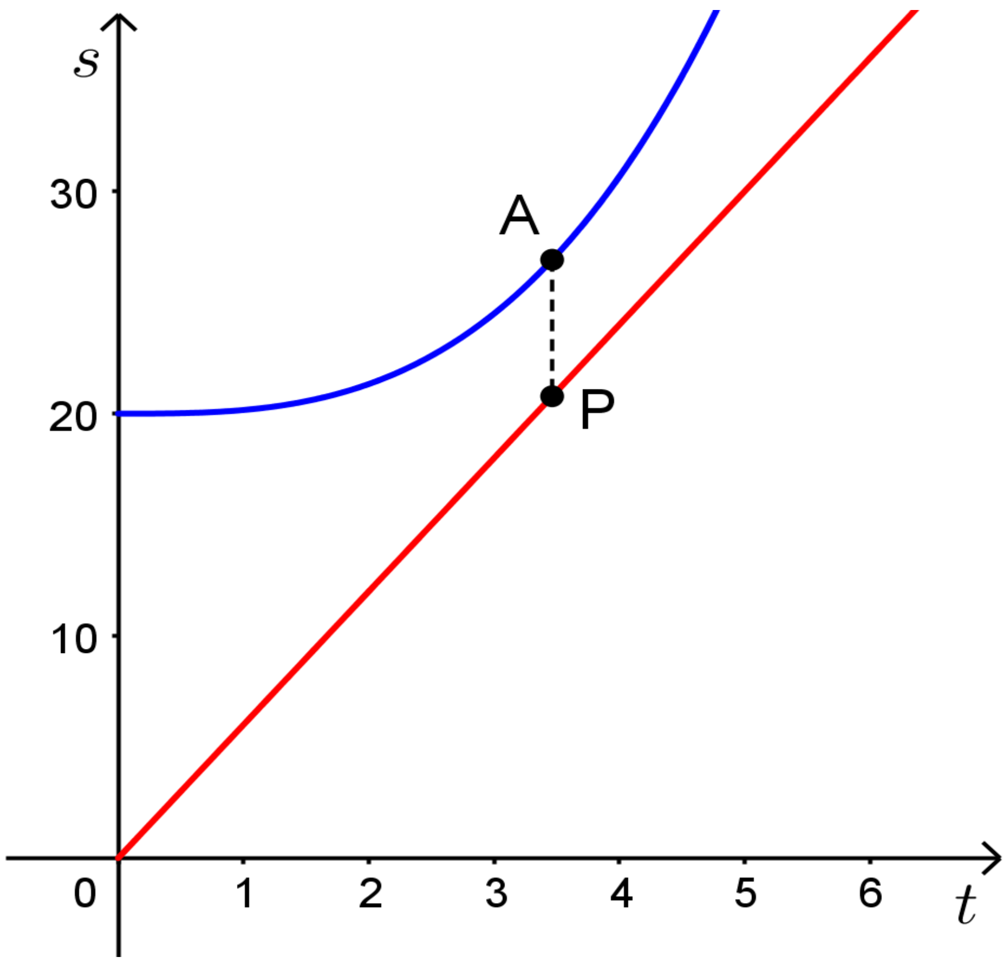
y
O
x

$$y = a\,x^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{y}{x^2}$$

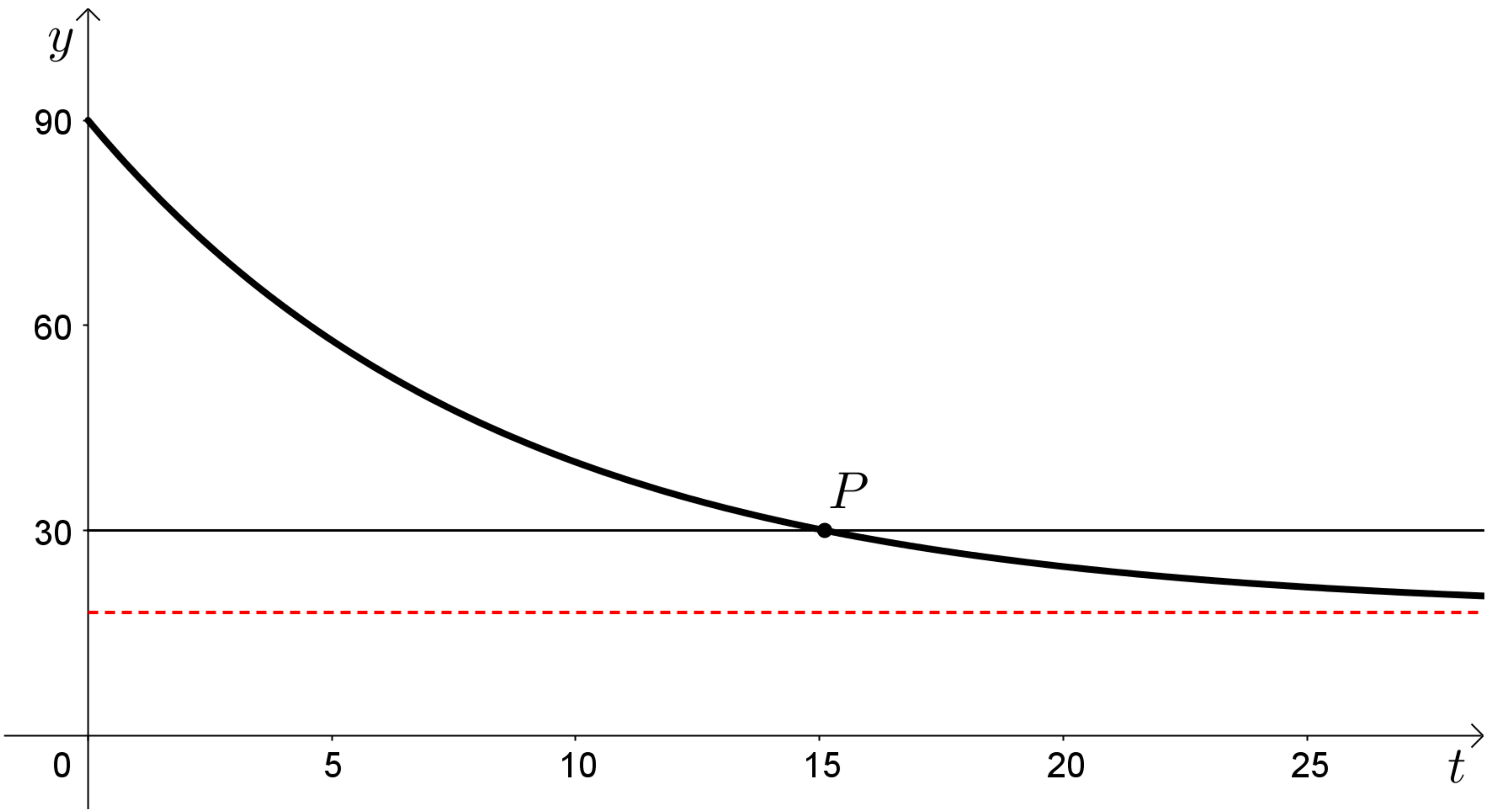
$$y' = 2\,a\,x \quad \Rightarrow \quad y' = 2\,\frac{y}{x^2}\,x = \frac{2\,y}{x}$$

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2\,y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = k$$

Pierino si trova a 20 metri dall'autobus che sta partendo dalla fermata con accelerazione di modulo $a(t) = t$. Pierino si mette a correre alla velocità costante di 6 m/s. Qual è la minima distanza alla quale arriva dall'autobus?

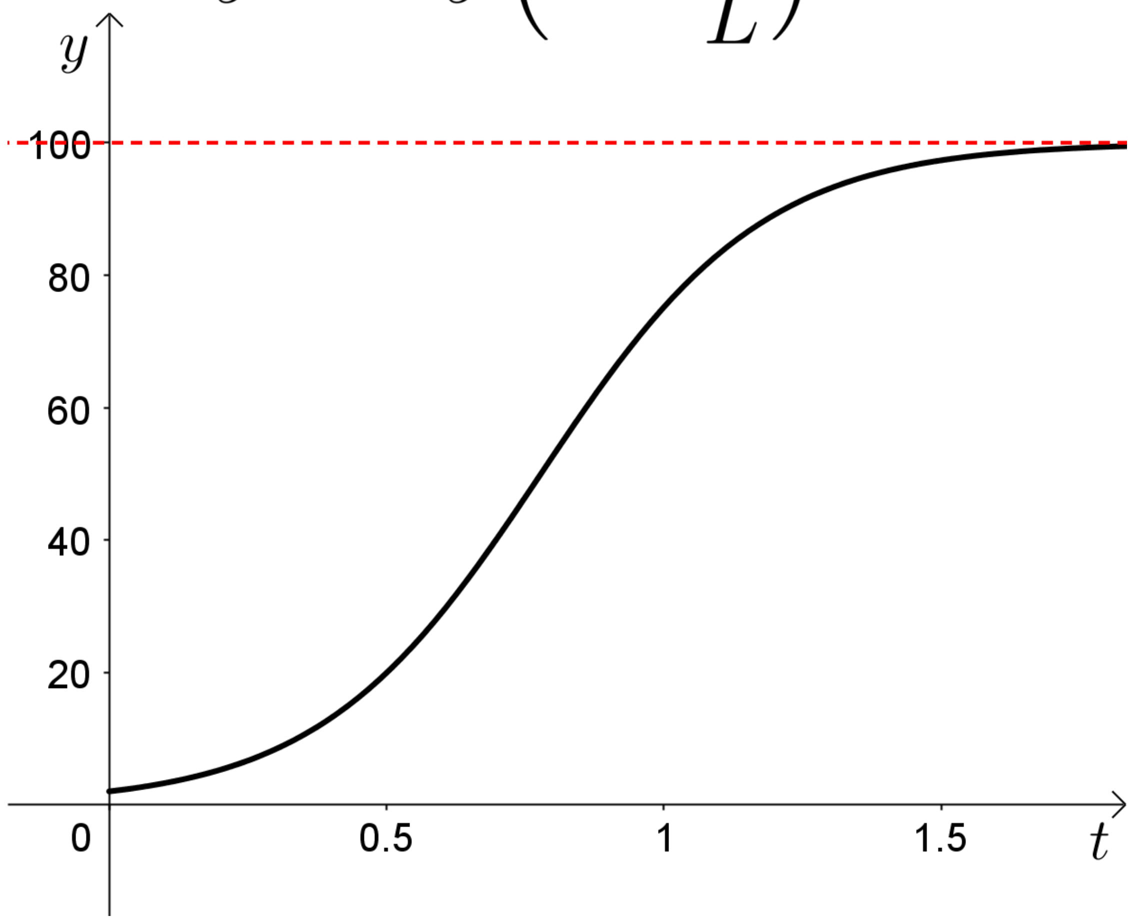


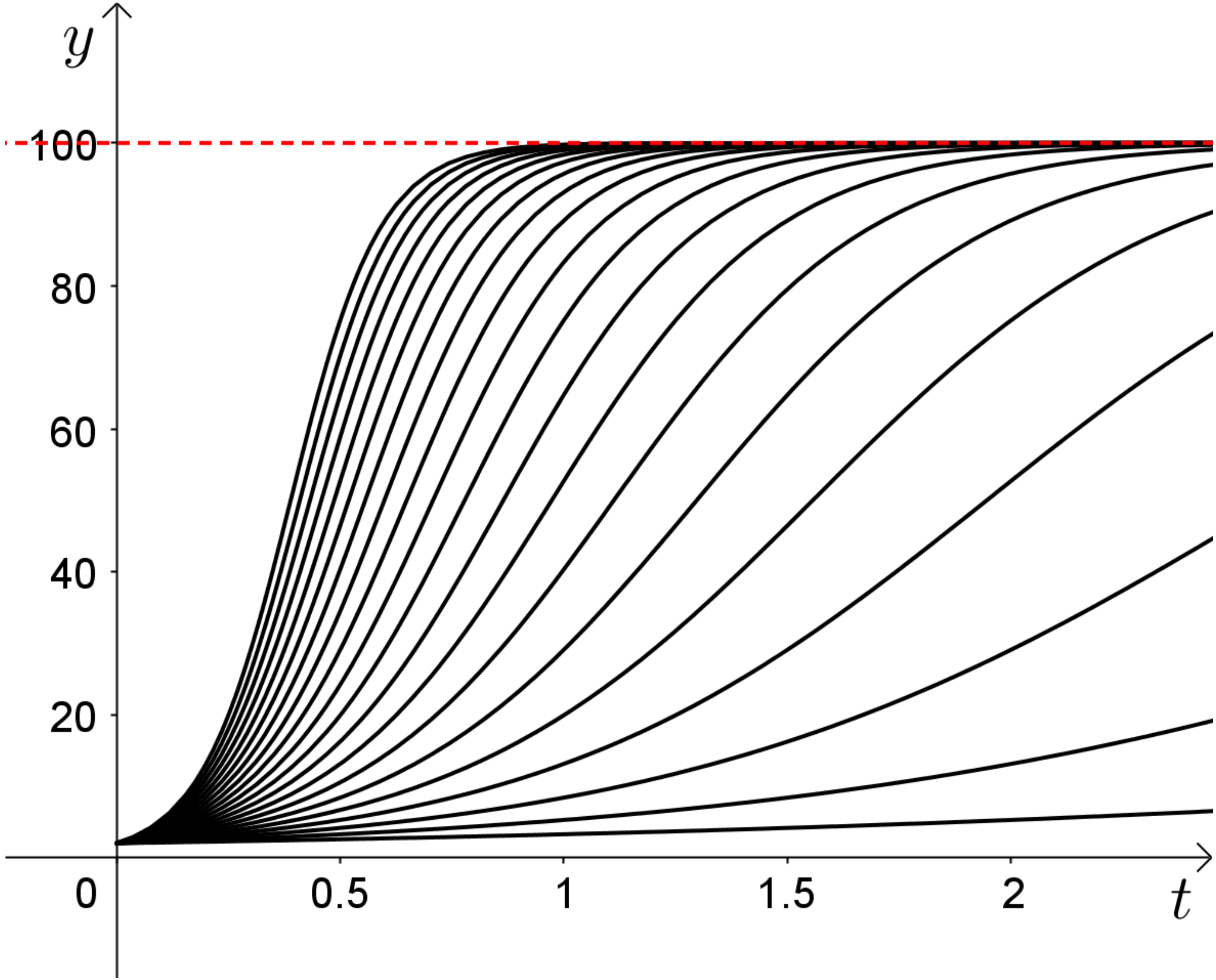
Tenendo conto che la velocità di raffreddamento di un corpo è proporzionale alla differenza delle temperature del corpo e dell'ambiente, si determini il tempo che occorre affinché la temperatura da 90 C scenda a 30 C se la temperatura dell'ambiente è 18 C e se nei primi 10 minuti la temperatura è scesa fino a 40 C.



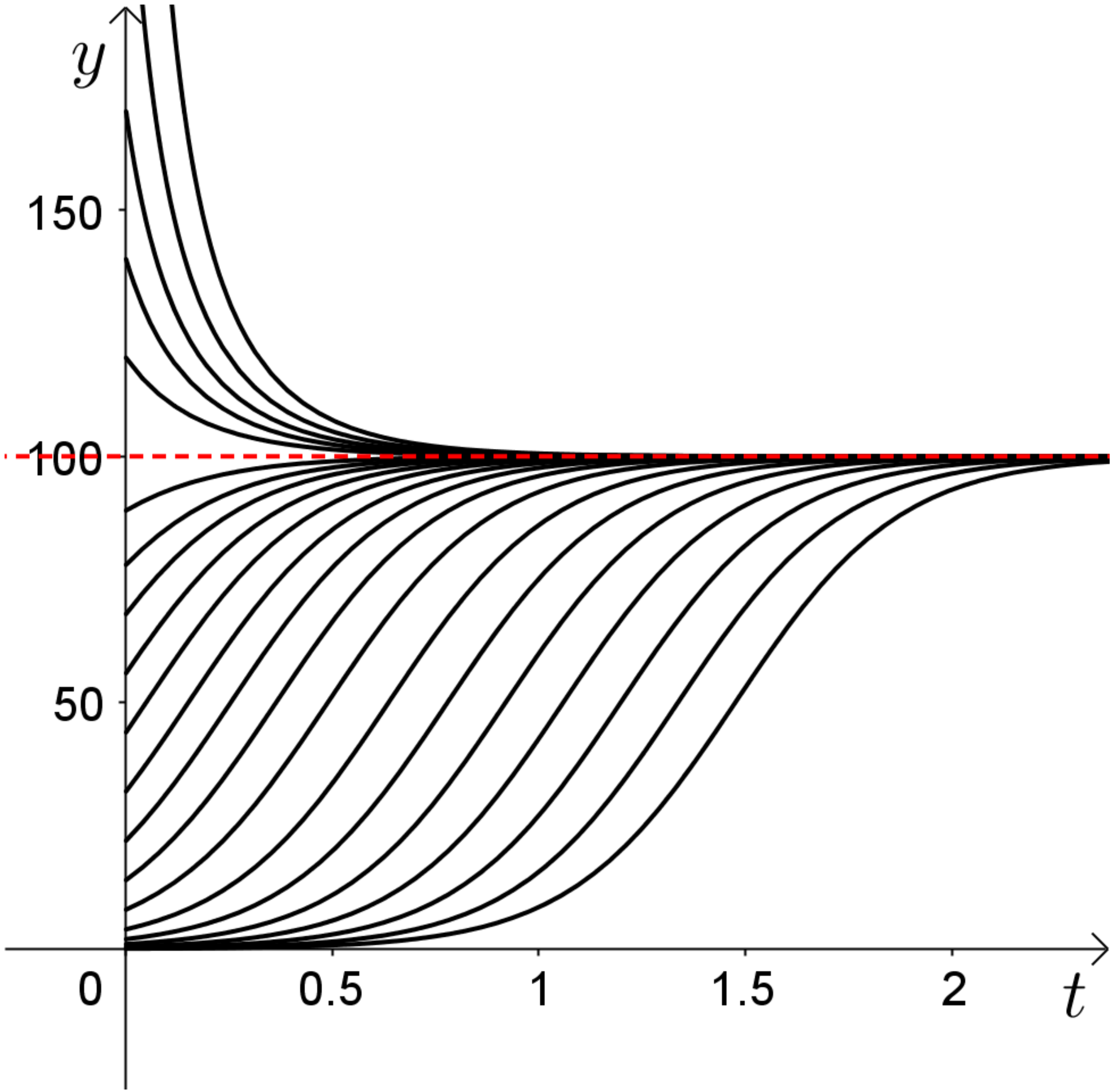
La crescita di una popolazione dipende da tanti fattori. Supponiamo che all'istante iniziale la popolazione sia y_0 e che $L \neq y_0$ sia il limite superiore, detto ***capacità dell'ambiente***. Un modello che descrive il suo andamento nel tempo è l'equazione logistica (Verhulst):

$$y' = k\,y\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$



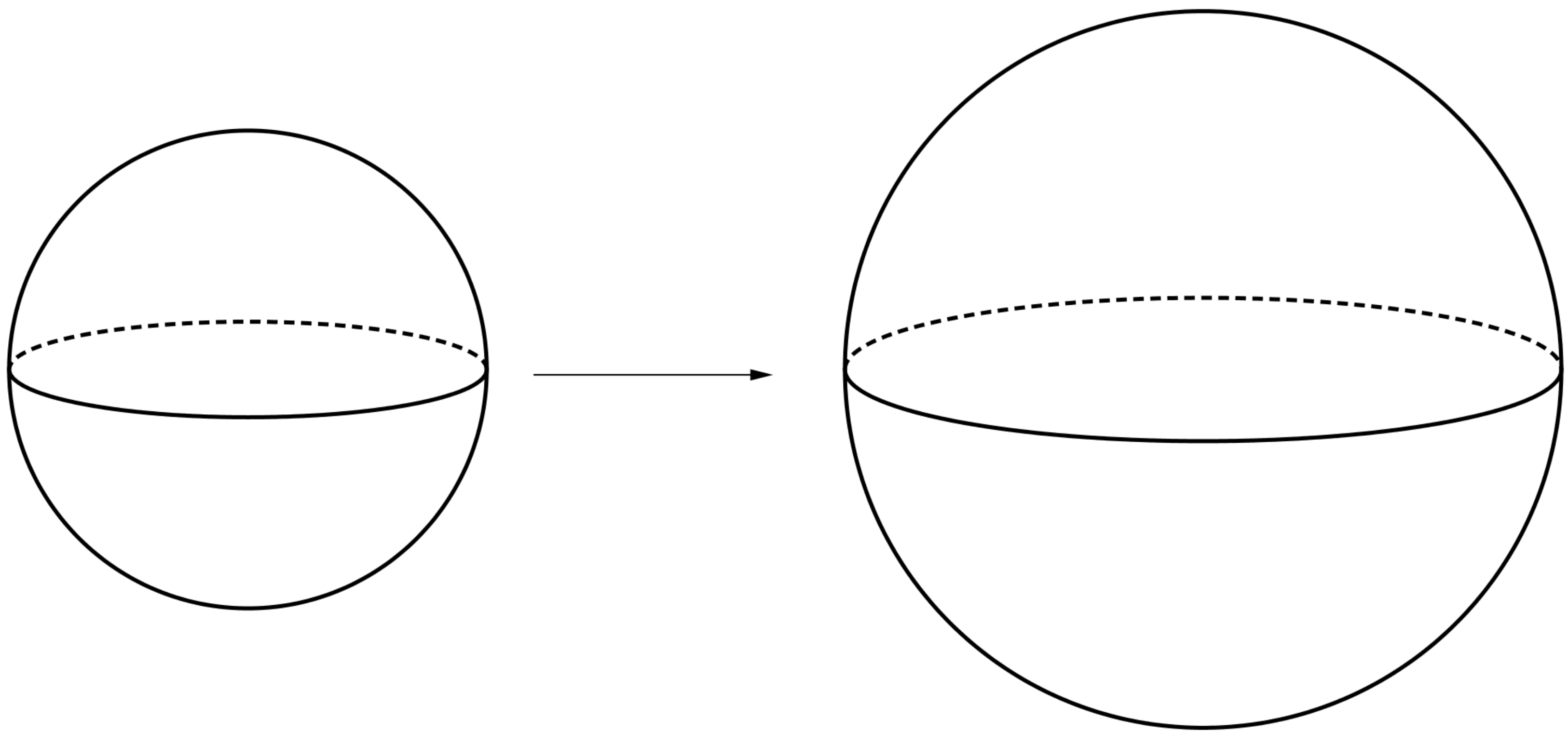


y
100
80
60
40
20
0
0.5
1
1.5
2
t

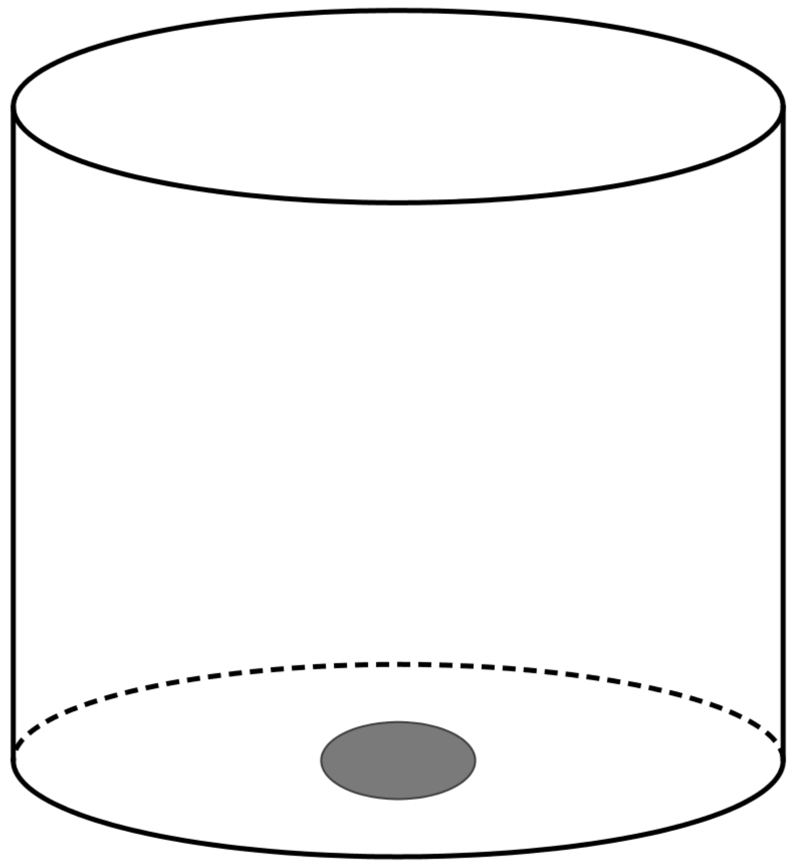


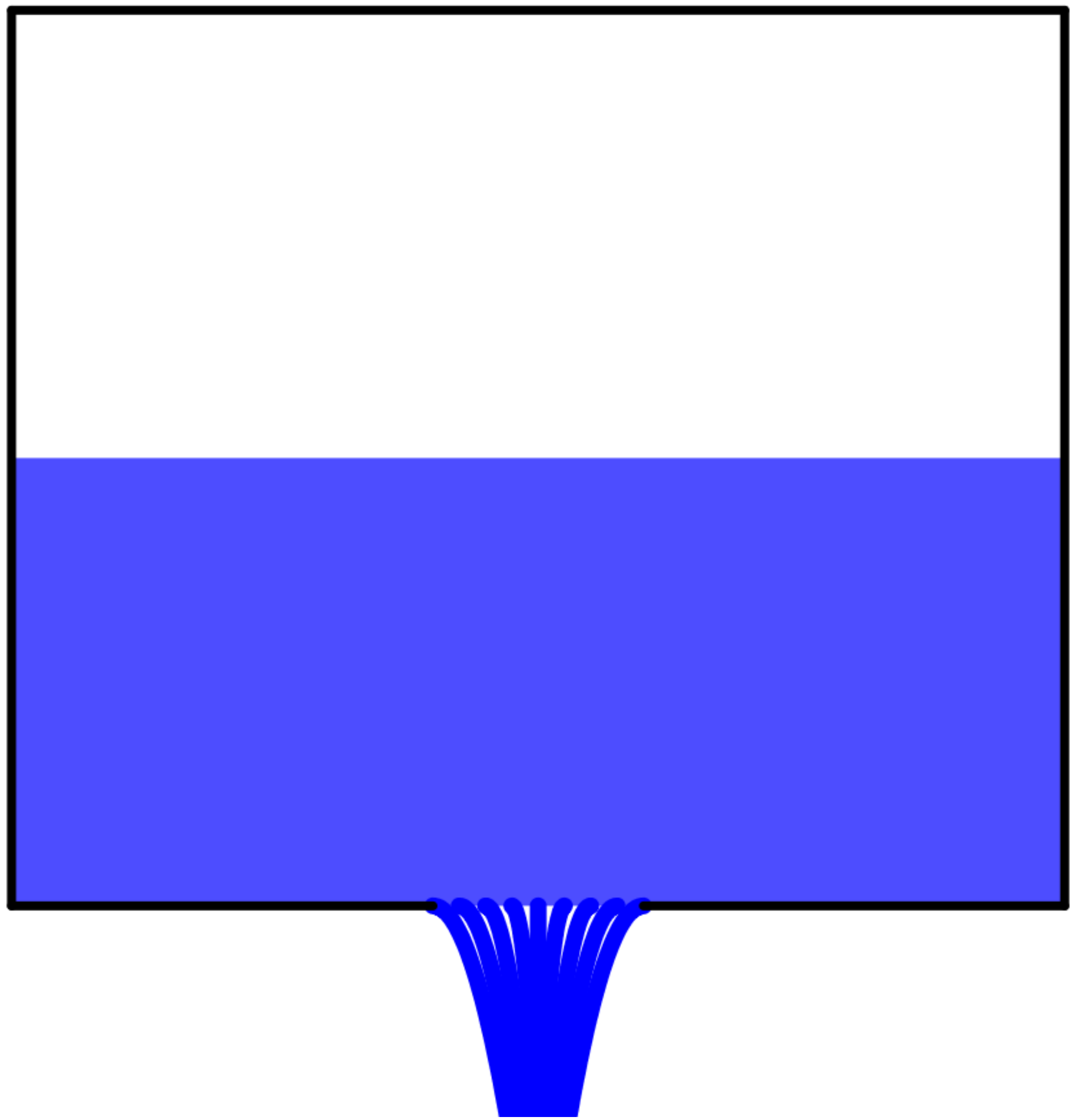
y
150
100
50
0
0.5
1
1.5
2
t

Una sfera aumenta il proprio volume <u>in modo direttamente proporzionale alla propria area</u>. Sapendo che all'istante iniziale il raggio è R e che all'istante t = T il raggio è raddoppiato, si determini il raggio all'istante generico t .



Un contenitore cilindrico, all'istante iniziale, è pieno di acqua fino ad una altezza h; il contenitore viene svuotato mediante un foro circolare. Sapendo che l'altezza all'istante T è pari a h/2, quanto tempo ci metterà a svuotarsi completamente?





Un corpo di massa M viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza h; supponiamo che su di esso, oltre alla forza peso, agisca anche la **forza dovuta alla resistenza dell'aria, proporzionale alla velocità del corpo, secondo una costante k**. Si scriva la legge oraria del moto in generale; si analizzi infine il caso in cui ipotizzando che

h = 80 m , k=4 kg/s , M = 10 kg , g=9,8 m/s^2.

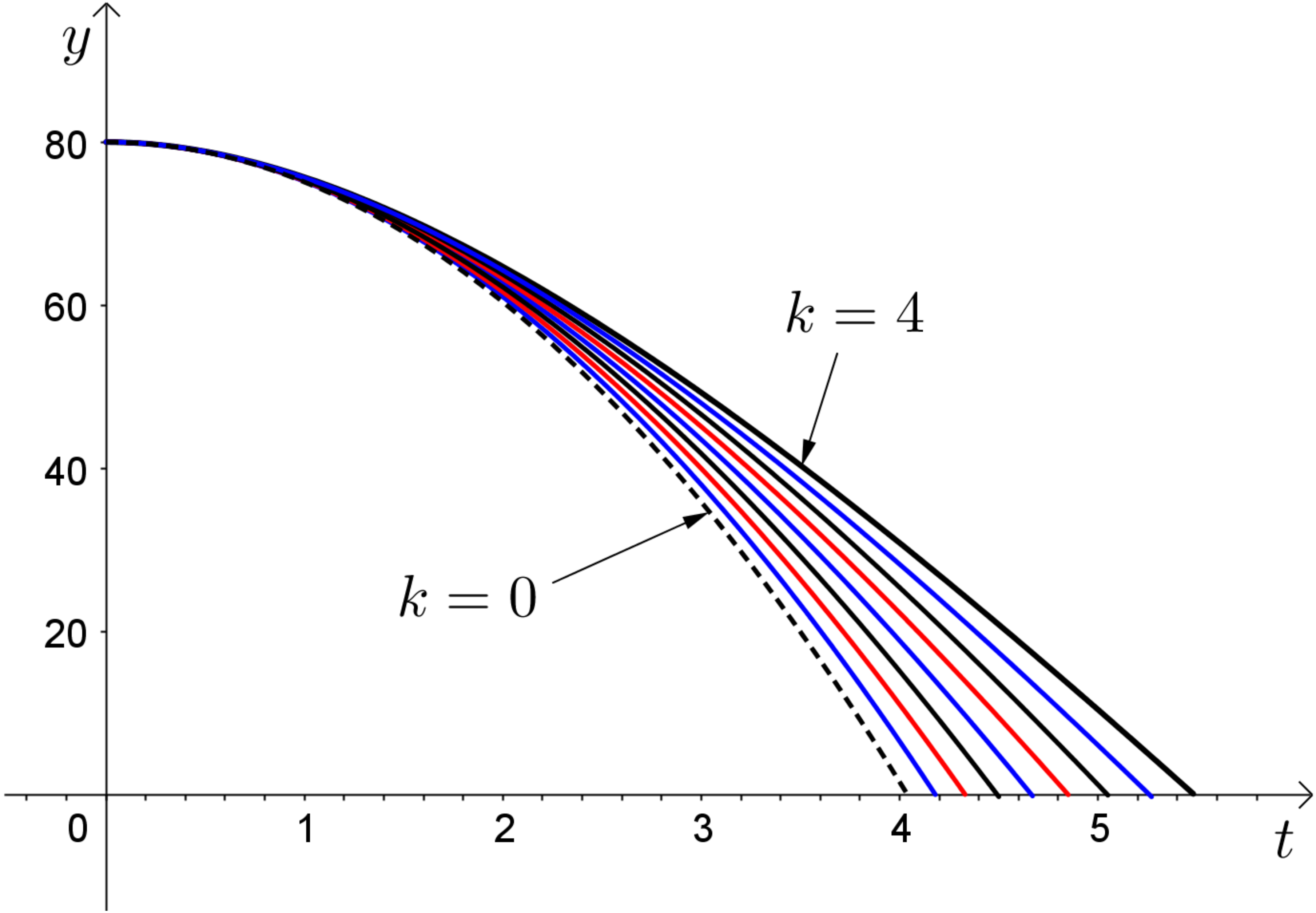
Quanto tempo impiega per raggiungere il suolo? Si faccia il confronto con il caso in cui la caduta sia senza attrito dell'aria.

$$m\,y'' = -m\,g - k\,v$$

$$m\,y'' = -m\,g - k\,y'$$

$$m\,v' = -m\,g - k\,v$$

$$v' = -\frac{k}{m}\,v - g$$



y
80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
t
k = 4
k = 0