Massimi e minimi senza derivate

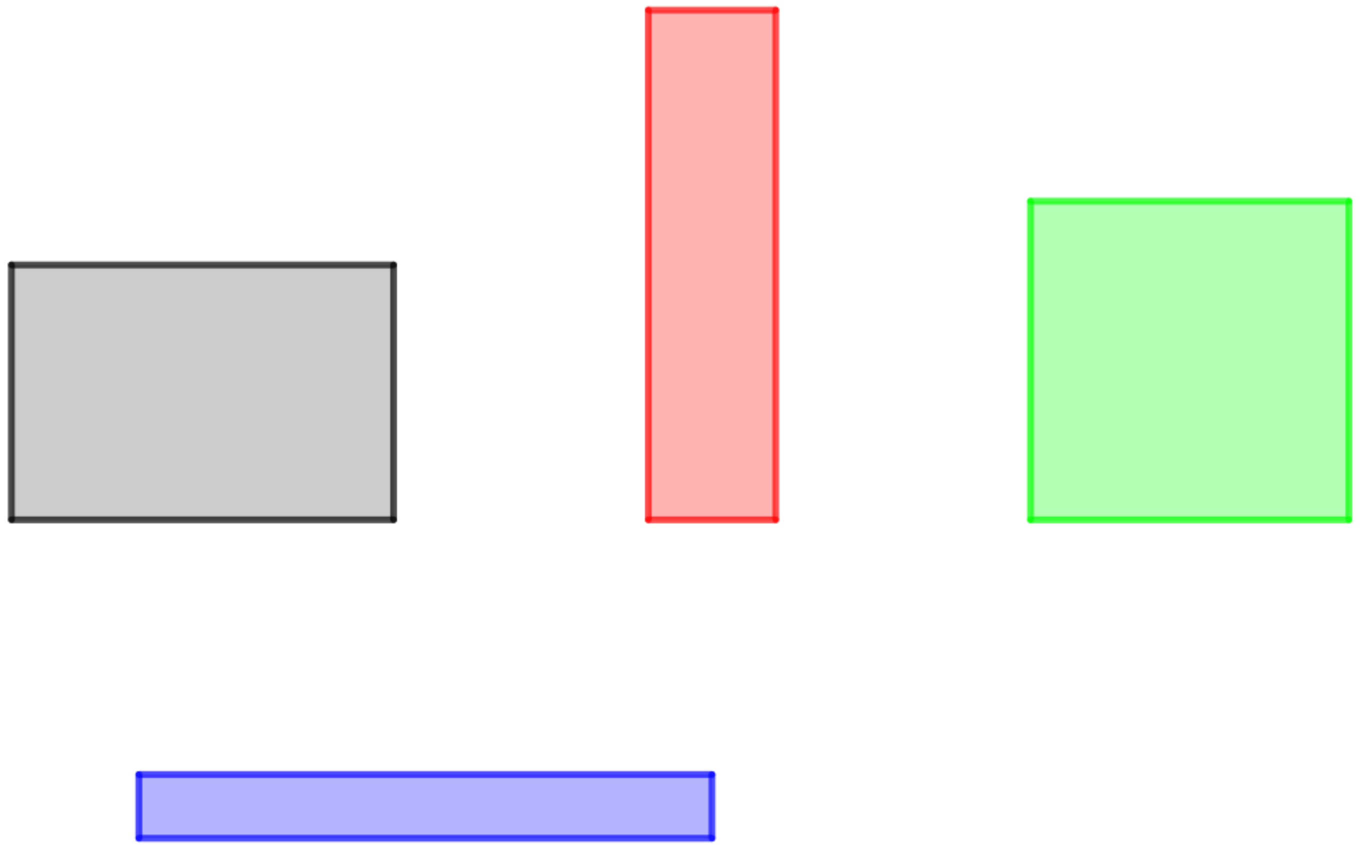
Francesco Daddi

9 maggio 2025

Problemi di massimo e minimo

- Importanti dal punto di vista storico
- Didatticamente interessanti (per Matematica e Fisica)
- Ottima «palestra» per gli studenti
- Interessante il confronto tra vari metodi

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.



Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.

Metodo «tradizionale»

Indichiamo con x uno dei lati del rettangolo (l'altro misura $y = p - x$)

$$A(x) = x\,(p - x) = p\,x - x^2$$

$$p\,x - x^2 = \frac{p^2}{4} - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \leqslant \frac{p^2}{4}$$

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.

Metodo «tradizionale»

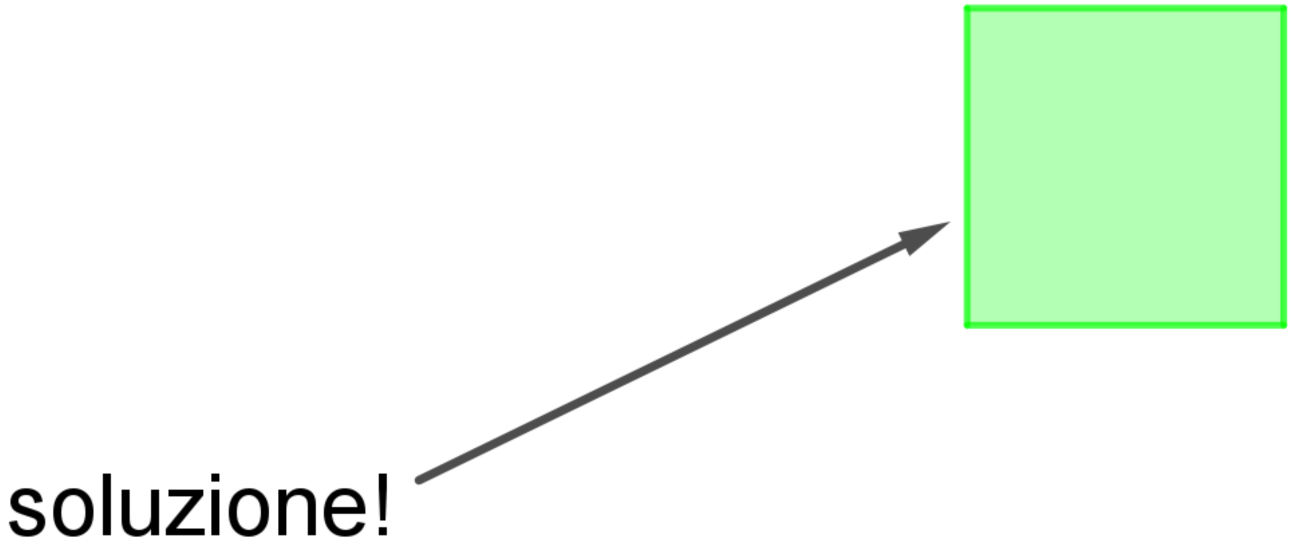
Indichiamo con x uno dei lati del rettangolo (l'altro misura $y = p - x$)

$$A(x) = x\,(p-x) = p\,x - x^2$$

$$x = \frac{p}{2}$$

$$p\,x - x^2 = \frac{p^2}{4} - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \leqslant \frac{p^2}{4}$$

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.



Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.

- Vediamo un metodo alternativo…

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.

Secondo metodo. Ponendo $\frac{p}{2} - y$, $\frac{p}{2} + y$ $\left(\text{dove } 0 \leqslant y < \frac{p}{2}\right)$ le misure dei lati del rettangolo, l'area

$$A(y) = \left(\frac{p}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{p}{2} + y\right) = \frac{p^2}{4} - y^2 \leqslant \frac{p^2}{4}$$

è massima quando $y = 0$,

quindi tutti i lati del rettangolo ottimo misurano $\frac{p}{2}$.

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.

- Vediamo un terzo metodo

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.

Indichiamo con x e y le misure dei lati del rettangolo.
L'area vale $x\,y$
Conviene scrivere $x\,y = \left(\sqrt{x\,y}\right)^2$
Sfruttiamo la disuguaglianza **MA-MG**

$$\sqrt{x\,y} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}$$

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro 2p, determinare quello di area massima.

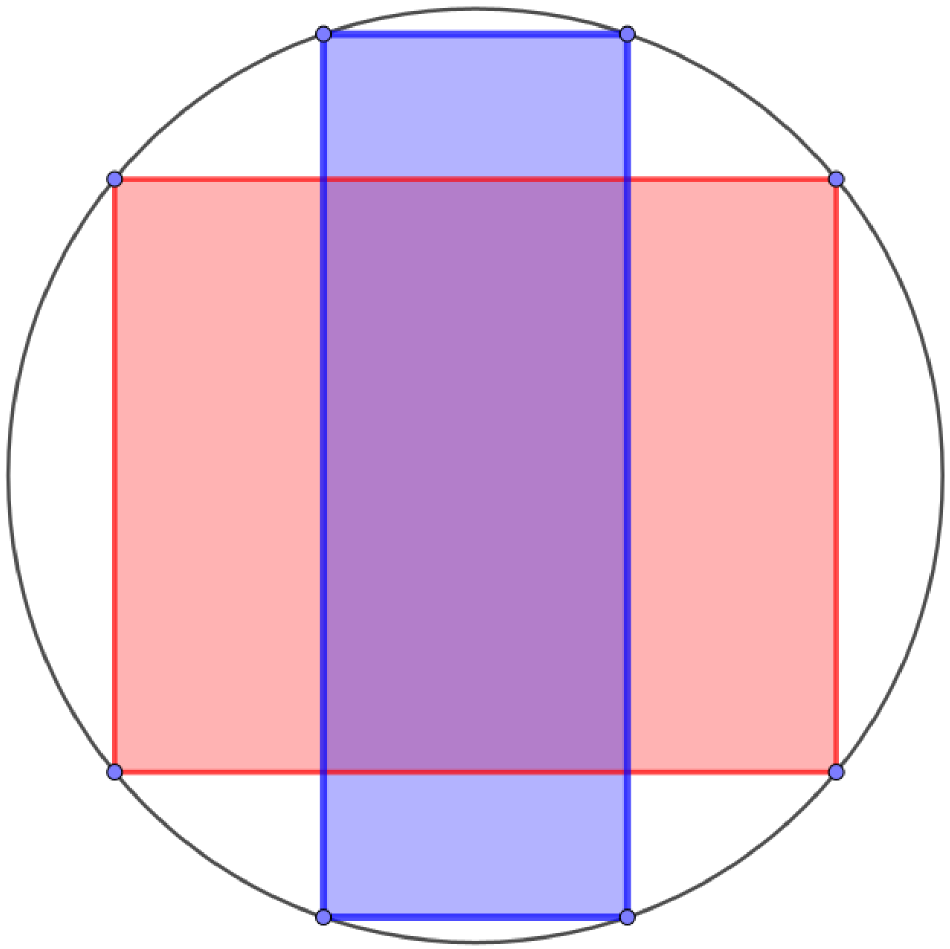
Elevando al quadrato si ottiene

$$\text{Area} = x\,y \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$$

dove l'uguaglianza si verifica se e solo se

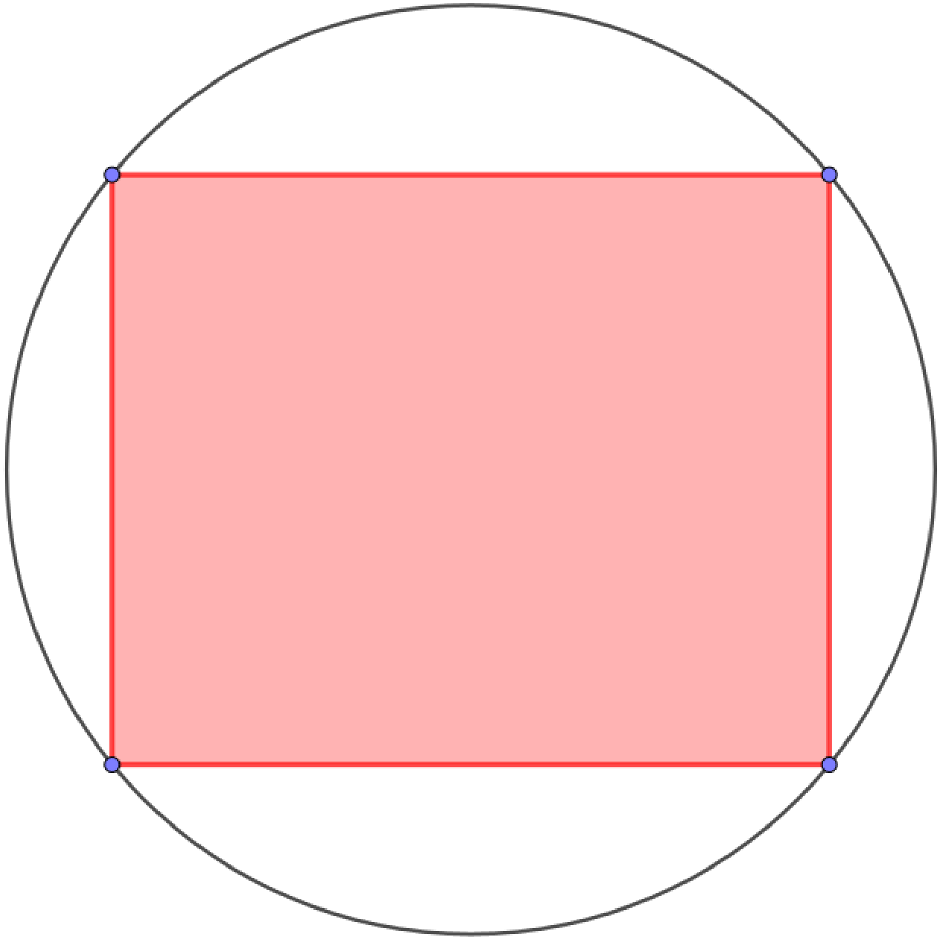
$$x = y = \frac{p}{2}$$

Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio R, si determini quello di perimetro massimo.



Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio R, si determini quello di perimetro massimo.

Indichiamo con $2\,x$ e $2\,y$ le misure dei lati



Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio R, si determini quello di perimetro massimo.

Sfruttiamo la disuguaglianza **MQ-MA**

$$\underbrace{4\,(x+y)}_{2p} = 8 \cdot \frac{x+y}{2} \leq 8 \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = 4\sqrt{2}\,R$$

in quanto $x^2 + y^2 = R^2$

Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio R, si determini quello di perimetro massimo.

Sfruttiamo la disuguaglianza **MQ-MA**

$$\underbrace{4\,(x+y)}_{2p} = 8 \cdot \frac{x+y}{2} \leq 8 \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = 4\sqrt{2}\,R$$

l'ottimo si ha per $x = y = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Tra i rettangoli aventi area S, si determini quello avente perimetro minimo

Tra i rettangoli aventi area S, si determini quello avente perimetro minimo

Indicata con x la lunghezza di uno dei lati del rettangolo

$$2p(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right) = 2\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4\sqrt{S}$$

Il minimo si ottiene se $\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{x}} = 0$ da cui $x = \sqrt{S}$.

Tra i rettangoli aventi area S, si determini quello avente perimetro minimo

Vediamo un altro metodo…

Tra i rettangoli aventi area S, si determini quello avente perimetro minimo

Indichiamo con x e y le misure dei lati

$$2\,p = 2\,(x+y) = 4\cdot\frac{x+y}{2} \geq 4\cdot\sqrt{x\,y}$$

con la disuguaglianza **MA-MG**

Tra i rettangoli aventi area S, si determini quello avente perimetro minimo

Indichiamo con x e y le misure dei lati

$$2\,p \;=\; 2\,(x+y) \;=\; 4\cdot\frac{x+y}{2} \;\geq\; 4\cdot\sqrt{x\,y} \;=\; 4\cdot\sqrt{S}$$

dove l'uguaglianza si ha se e solo se $x = y = \sqrt{S}$

Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Indichiamo con $x \in (0, d)$ la misura di uno dei cateti

l'altro cateto ha lunghezza $\sqrt{d^2 - x^2}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^2\, x^2 - x^4}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^4}{4} - \left(x^2 - \frac{d^2}{2}\right)^2}$$

Il massimo si ottiene quando $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Indichiamo con $x \in (0, d)$ la misura di uno dei cateti

l'altro cateto ha lunghezza $\sqrt{d^2 - x^2}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^2 x^2 - x^4}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^4}{4} - \left(x^2 - \frac{d^2}{2}\right)^2}$$

triangolo rettangolo isoscele

Il massimo si ottiene quando $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Seconda soluzione

Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Indicando con x, y le misure dei due cateti $\quad d^2 = x^2 + y^2$

sfruttando la disuguaglianza **MQ-MG**

$$\sqrt{x\,y} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$S = \frac{1}{2}\,x\,y = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x\,y}\,\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$x = y = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Indicando con x, y le misure dei due cateti $\quad d^2 = x^2+y^2$

sfruttando la disuguaglianza **MQ-MG**

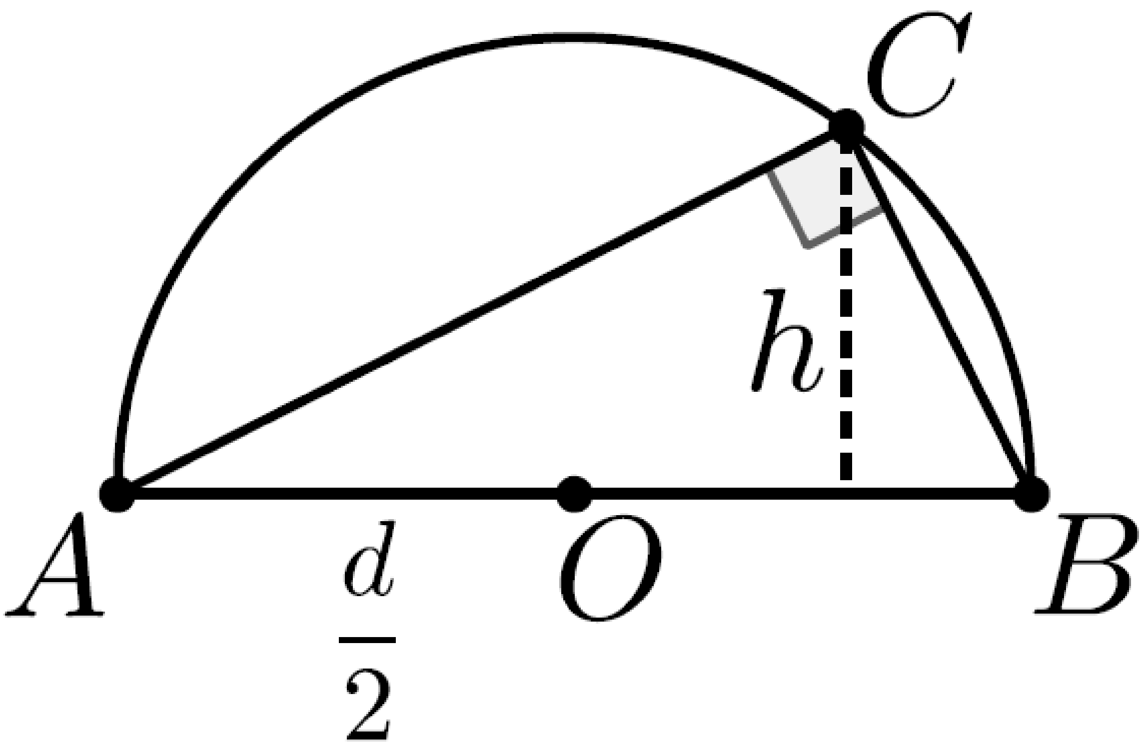
$$\sqrt{x\,y} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$S = \frac{1}{2}\,x\,y = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x\,y}\,\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$x = y = \frac{d}{\sqrt{2}}$$ **triangolo rettangolo isoscele**

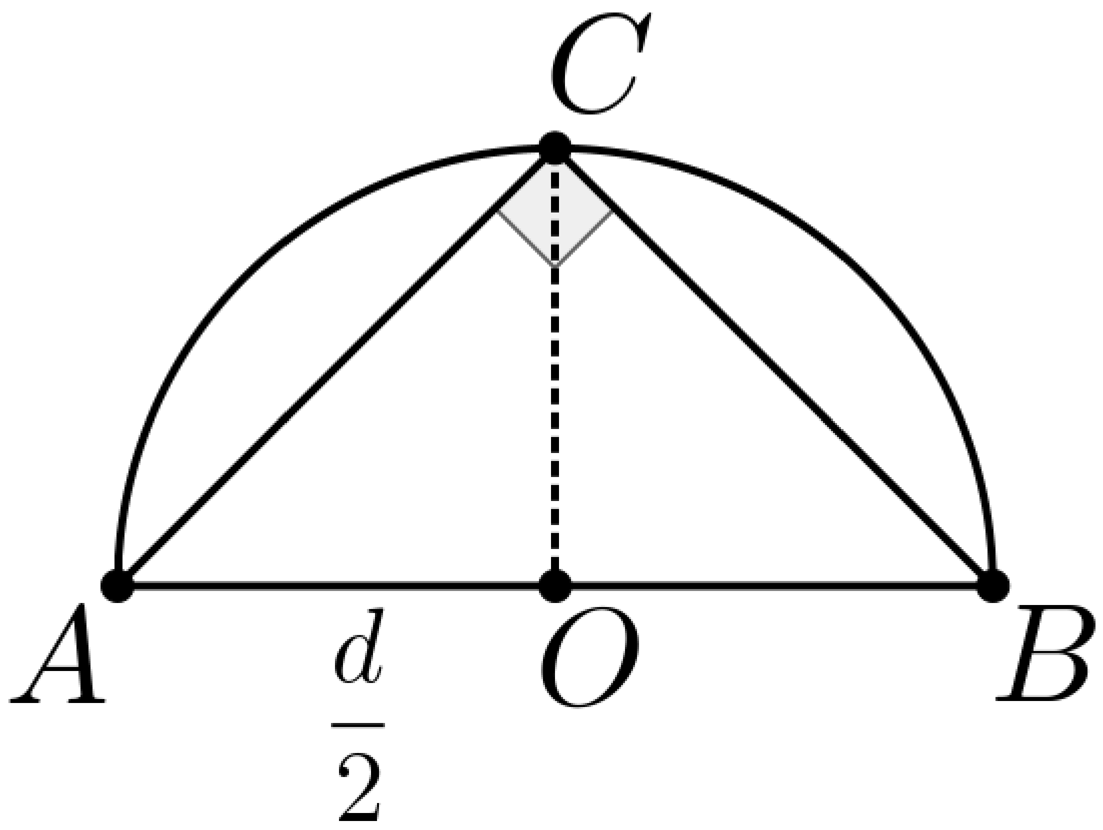
Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Terza soluzione



Fra i triangoli rettangoli aventi ipotenusa d fissata, si determini quello di area massima

Terza soluzione



Soluzione ottima

Fra tutti i triangoli aventi perimetro 2p fissato, si determini quello di area massima

Fra tutti i triangoli aventi perimetro 2p fissato, si determini quello di area massima

Iniziamo dalla **formula di Erone** per l'area A

$$A = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{A^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$$

osservando che la somma dei fattori (tutti positivi) è

$$(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3\,p - \underbrace{(a+b+c)}_{2\,p} = p$$

Fra tutti i triangoli aventi perimetro 2p fissato, si determini quello di area massima

osservando che la somma dei fattori (tutti positivi) è

$$(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3\,p - \underbrace{(a+b+c)}_{2\,p} = p$$

l'area massima si ottiene quando i fattori sono uguali

Fra tutti i triangoli aventi perimetro 2p fissato, si determini quello di area massima

osservando che la somma dei fattori (tutti positivi) è

$$(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3\,p - \underbrace{(a+b+c)}_{2\,p} = p$$

l'area massima si ottiene quando i fattori sono uguali

il triangolo ottimo è **equilatero**

Fra tutti i triangoli aventi perimetro 2p fissato, si determini quello di area massima

$$\frac{A^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\sqrt[3]{\frac{A^2}{p}} = \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

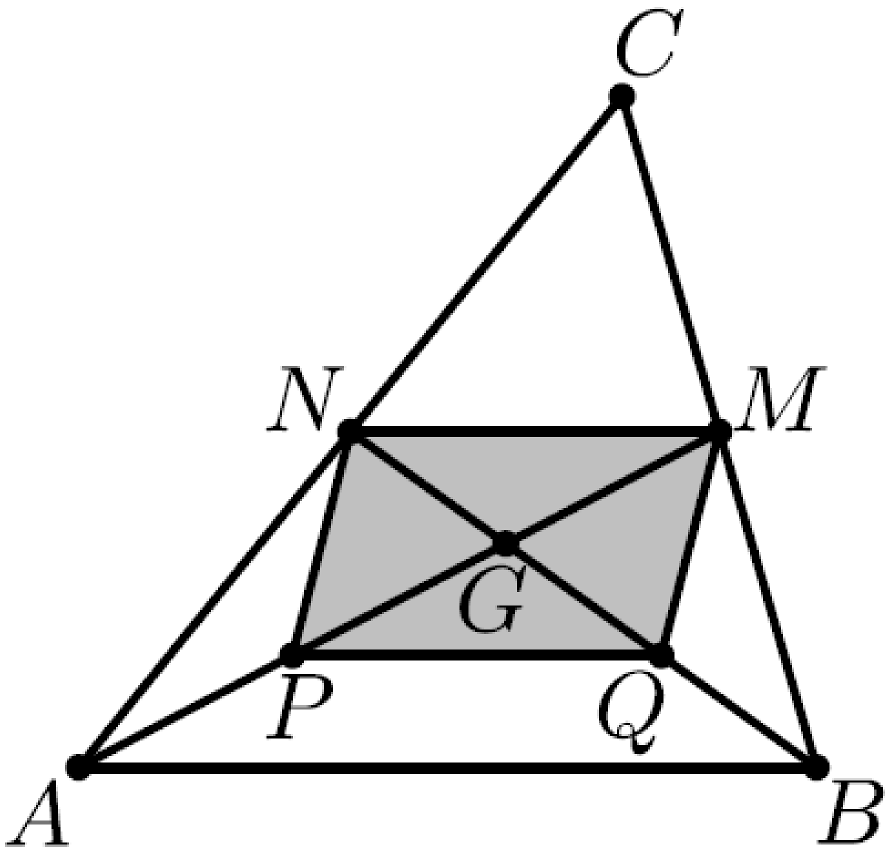
$$\leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{p}{3}$$

Fra tutti i triangoli aventi perimetro 2p fissato, si determini quello di area massima

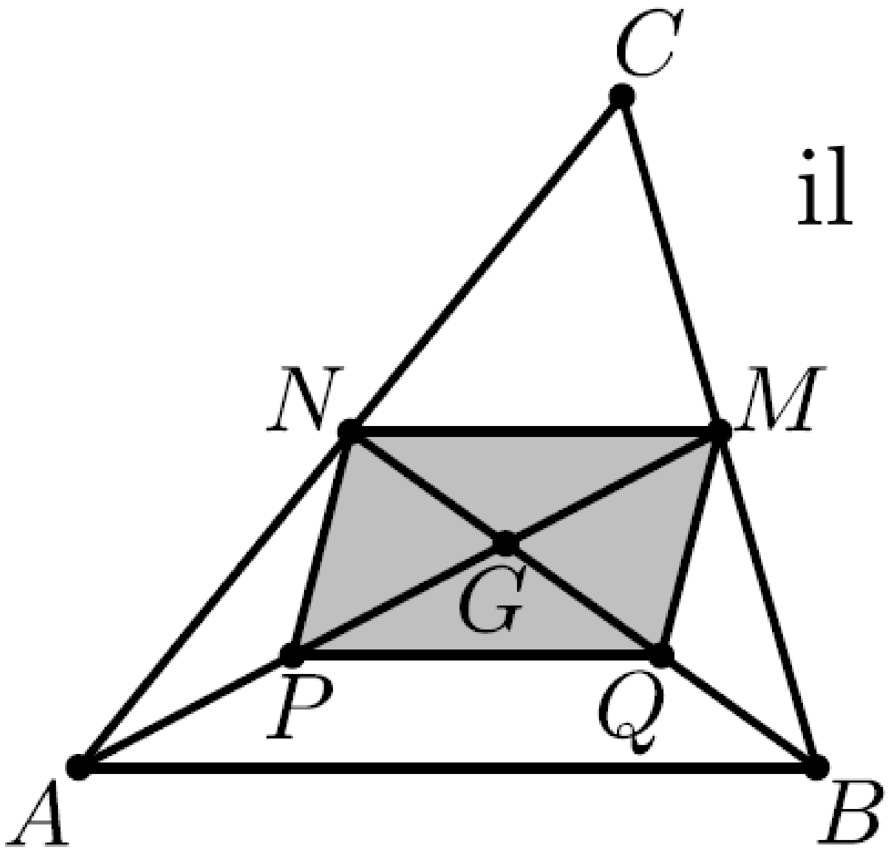
$$\sqrt[3]{\frac{A^2}{p}} \leq \frac{p}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{A^2}{p} \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad A^2 \leq \frac{p^4}{27} \qquad\qquad A_{\max} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

Fra tutti i triangoli *ABC* di perimetro assegnato 2*p*, si determini quello per cui è massima l'area del parallelogrammo *PQMN*, dove *M* è il punto medio di *BC*, *N* è il punto medio di *AC*, *P* è il punto medio di *AG*, *Q* è il punto medio di *BG*



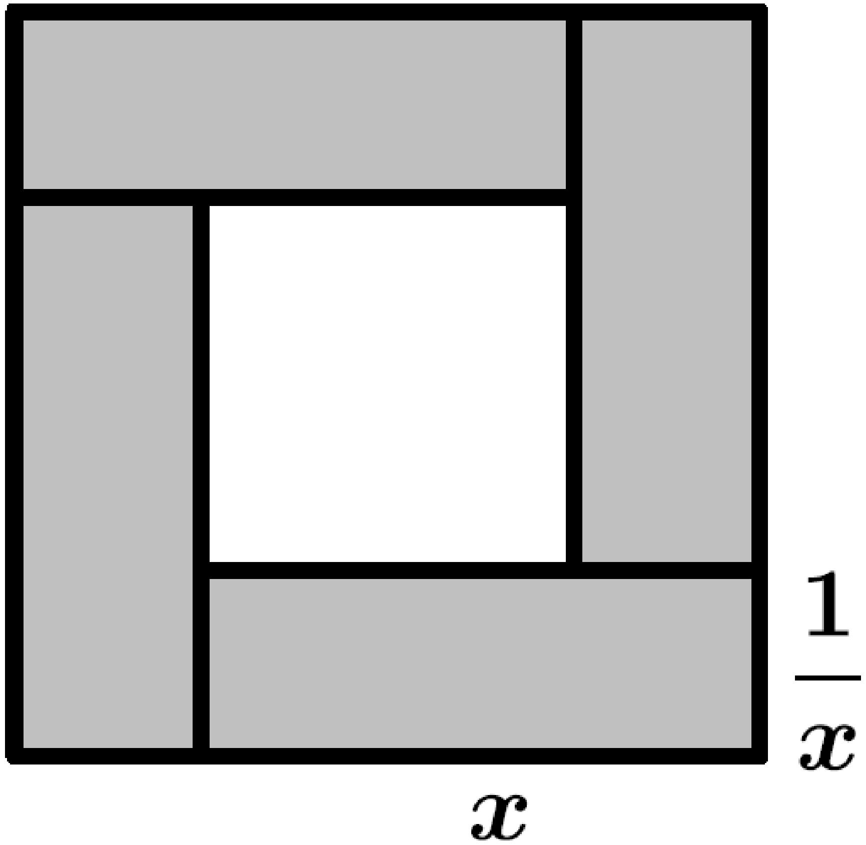
Fra tutti i triangoli *ABC* di perimetro assegnato 2*p*, si determini quello per cui è massima l'area del parallelogrammo *PQMN*, dove *M* è il punto medio di *BC*, *N* è il punto medio di *AC*, *P* è il punto medio di *AG*, *Q* è il punto medio di *BG*



il triangolo ottimo è **equilatero**

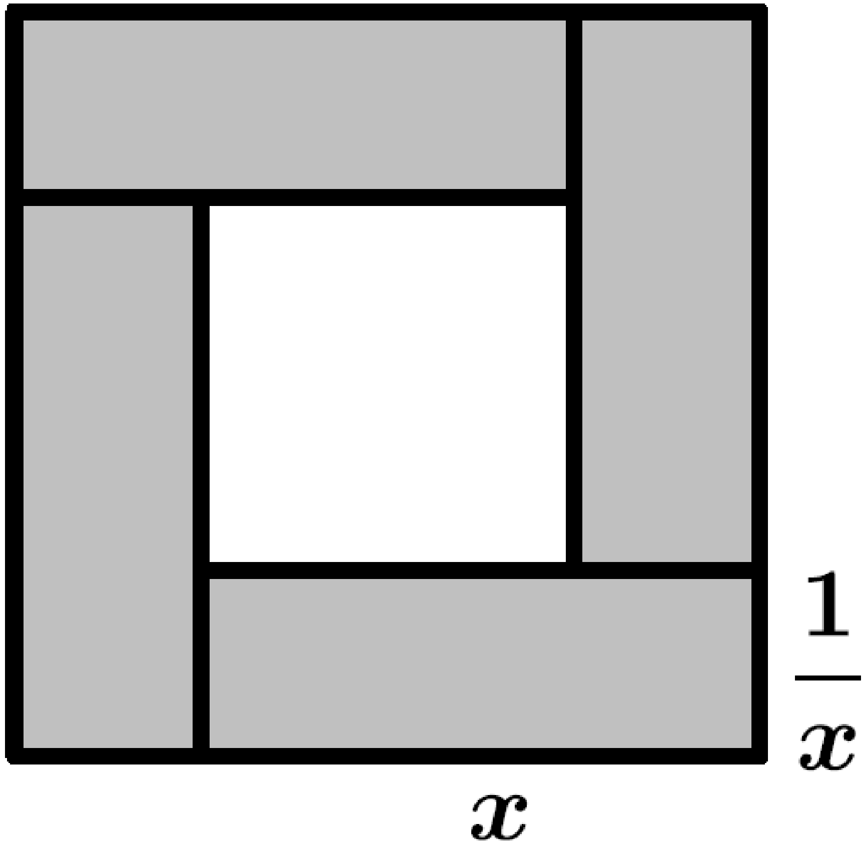
$$\text{minimo di } f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{minimo di } f(x) = x + \frac{1}{x}$$



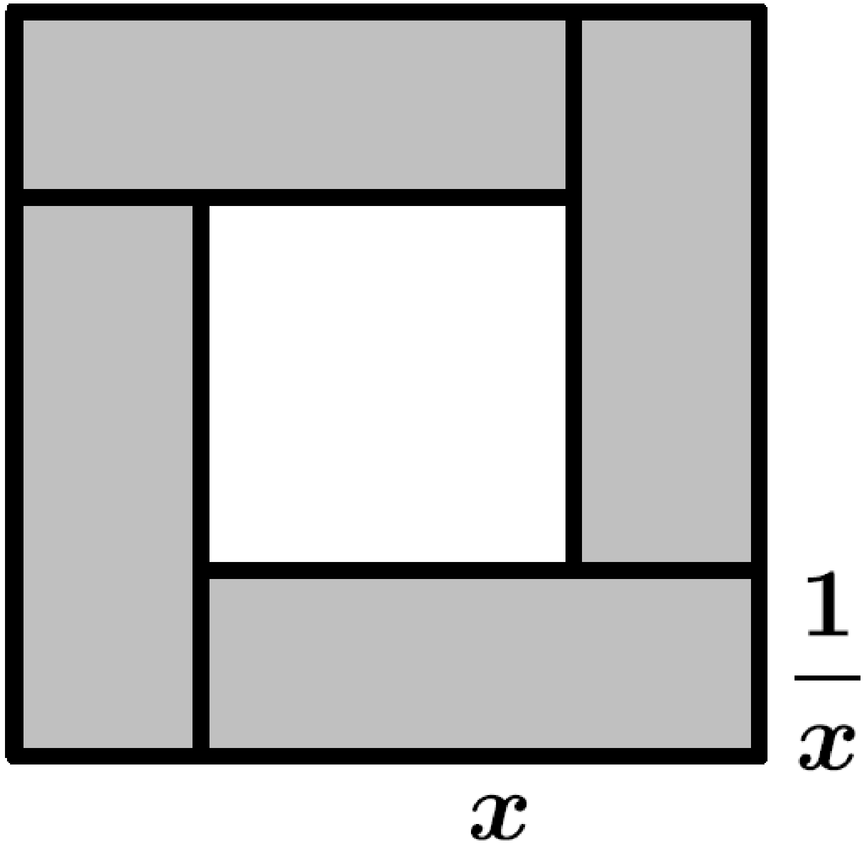
$$\text{con } x > 0$$

$$\text{minimo di } f(x) = x + \frac{1}{x}$$



$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{minimo di } f(x) = x + \frac{1}{x}$$



$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$\text{minimo di } f(x) = x + \frac{a}{x}$$

$$\text{con } a > 0,\ x > 0$$

$$\text{minimo di } f(x) = x + \frac{a}{x}$$

$$\text{con } a > 0,\ x > 0$$

il prodotto degli addendi è costante

il minimo si ha quando

$$x = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{a}$$

$$\text{minimo di } f(x) = x + \frac{a}{x}$$

$$x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = 2\sqrt{\cancel{x} \cdot \frac{a}{\cancel{x}}}$$

$$x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$$

$$\text{massimo di } g(x) = \frac{x}{a + x^2}$$

$$\text{con } a > 0,\ x > 0$$

$$\text{massimo di } g(x) = \frac{x}{a + x^2}$$

$$\text{con } a > 0,\ x > 0$$

$$\text{analizziamo } f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{a + x^2}{x}$$

$$\text{massimo di } g(x) = \frac{x}{a + x^2}$$

$$\text{con } a > 0,\ x > 0$$

$$\text{analizziamo } f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{a + x^2}{x}$$

$$= x + \frac{a}{x}$$

$$\text{massimo di } g(x) = \frac{x}{a + x^2}$$

$$\text{con } a > 0,\ x > 0$$

$$\text{analizziamo } f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{a + x^2}{x}$$

$$= x + \frac{a}{x}$$

$$\textbf{il minimo di } f(x) \text{ si ha con } x = \sqrt{a}$$

massimo di $f(x) = x^3\,(k - x)^4$

sull'intervallo $(0, k)$

$$\text{massimo di } f(x) = x^3\,(k-x)^4$$

$$f(x) = \frac{27}{64}\cdot\left(\underbrace{\frac{4}{3}x\cdot\frac{4}{3}x\cdot\frac{4}{3}x\cdot(k-x)\cdot(k-x)\,(k-x)\cdot(k-x)}_{\text{somma}\,=\,4\,k}\right)$$

$$\text{massimo di } f(x) = x^3\,(k-x)^4$$

$$f(x) = \frac{27}{64} \cdot \left(\underbrace{\frac{4}{3}\,x \cdot \frac{4}{3}\,x \cdot \frac{4}{3}\,x \cdot (k-x) \cdot (k-x)\,(k-x) \cdot (k-x)}_{\text{somma} \,=\, 4\,k} \right)$$

$$\frac{4}{3}\,x = k - x \quad \text{da cui } x = \frac{3}{7}\,k.$$

massimo di $f(x) = x\left(k - x^2\right)$

sull'intervallo $\left(0, \sqrt{k}\right)$

massimo di $f(x) = x\left(k - x^2\right)$

$$g(x) = \big(f(x)\big)^2$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(k - x^2\right)^2 \\ &= x^2(k - x^2)(k - x^2) \end{aligned}$$

massimo di $f(x) = x\left(k - x^2\right)$

$$g(x) = \big(f(x)\big)^2$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2\,x^2 \cdot \left(k - x^2\right) \cdot \left(k - x^2\right)}_{\text{somma} = 2\,x^2 + k - x^2 + k - x^2 = 2\,k}$$

$$2\,x^2 = k - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{k}{3}}$$

Si determini il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \sin^4 x \cdot \cos^5 x \qquad \text{sull'intervallo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Si determini il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \sin^4 x \cdot \cos^5 x \quad \text{sull'intervallo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

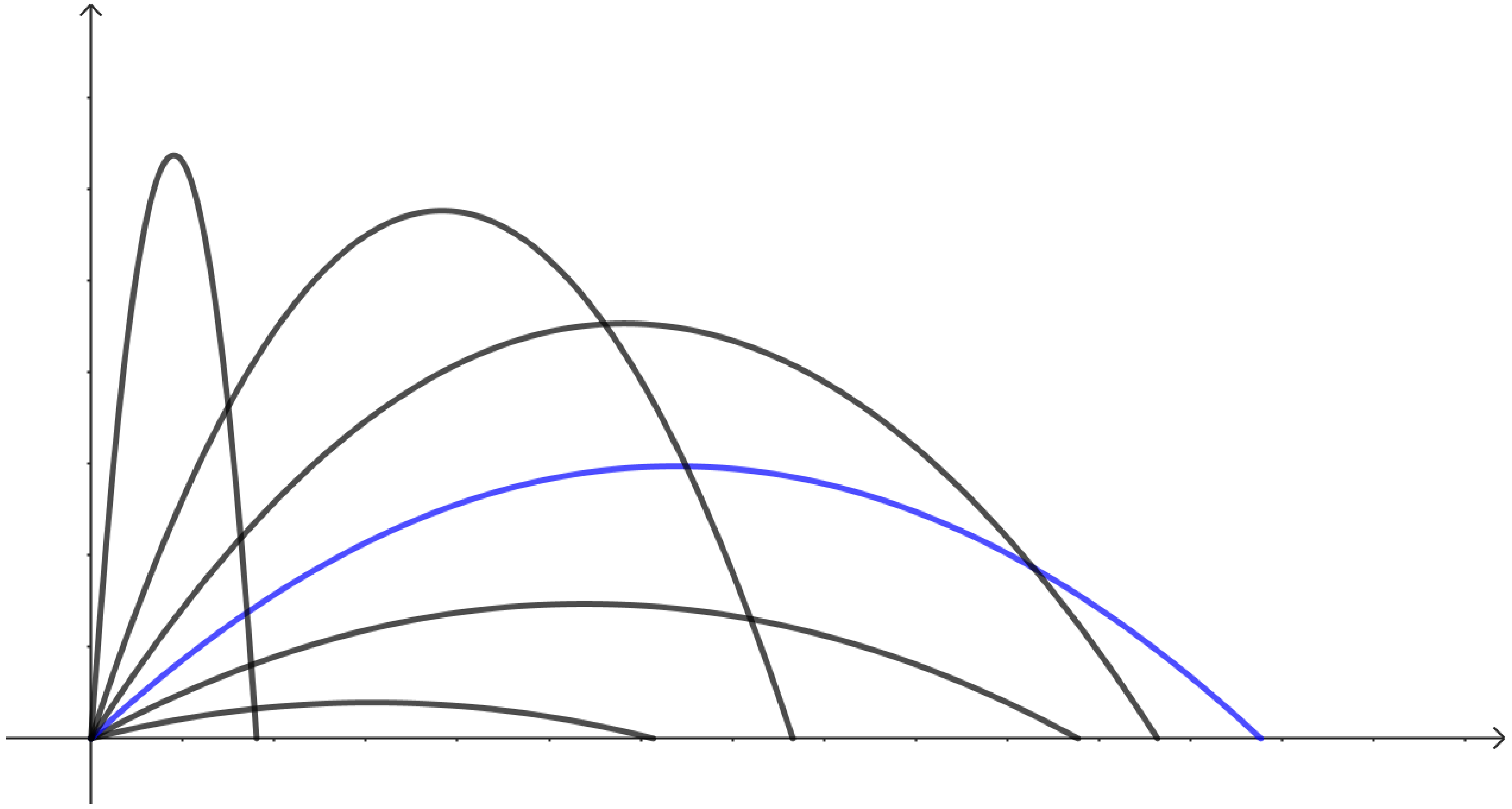
$$g(x) = \big(f(x)\big)^2 = \left(\sin^2 x\right)^4 \cdot \left(\cos^2 x\right)^5$$

$$g(x) = \frac{4^4}{5^4} \cdot \underbrace{\frac{5\sin^2 x}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{5\sin^2 x}{4}}_{4 \text{ fattori}} \cdot \underbrace{\cos^2 x \cdot \ldots \cdot \cos^2 x}_{5 \text{ fattori}}$$

la somma dei 9 fattori è costante

$$\frac{5\sin^2 x}{4} = \cos^2 x \quad \text{da cui ricaviamo } x = \arcsin\frac{2}{3}$$

Problema della gittata massima



Problema della gittata massima

Siano v_{0x} e v_{0y} le componenti della velocità iniziale.

Risulta

$$v_0^2 \;=\; v_{0x}^2 + v_{0y}^2$$

Problema della gittata massima

$$G = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g} = \frac{2}{g} \cdot v_{0x} \cdot v_{0y} \leqslant \frac{2}{g} \cdot \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{2}$$

sfruttando la disuguaglianza **MQ-MG**

infatti $\sqrt{v_{0x} v_{0y}} \leq \sqrt{\dfrac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{2}}$

Problema della gittata massima

$$G = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g} = \frac{2}{g} \cdot v_{0x} \cdot v_{0y} \leqslant \frac{2}{g} \cdot \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{2}$$

dove l'uguaglianza si ha se e solo se $v_{0x} = v_{0y}$

Problema della gittata massima

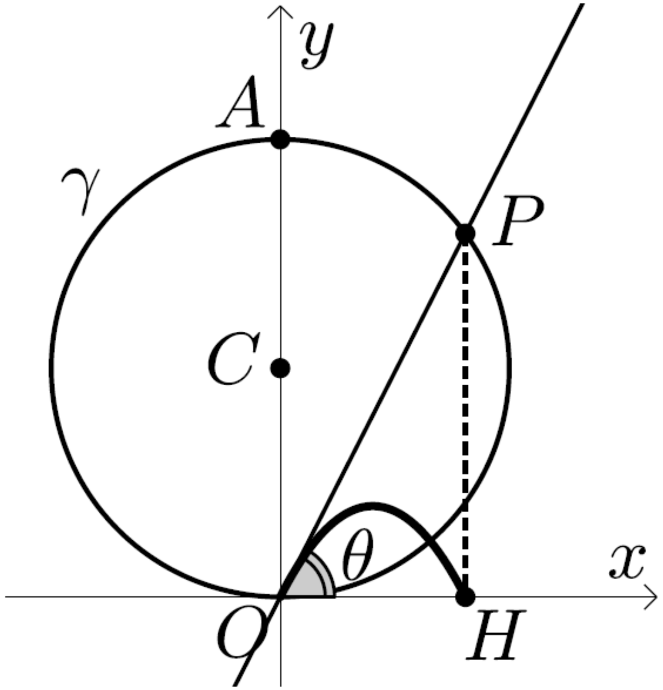
In definitiva abbiamo

$$G_{\max} = \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{g} = \frac{v_0^2}{g}$$

Problema della gittata massima

Consideriamo la circonferenza γ di centro $C\left(0\,;\dfrac{v_0^2}{g}\right)$ e passante per O.

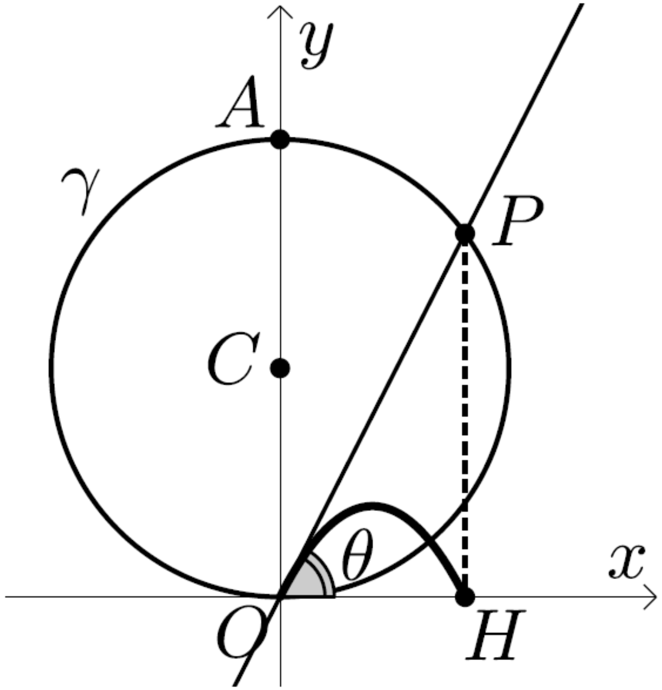
Intersechiamo γ con la retta $y = x\,\tan\theta$ individuando il punto P

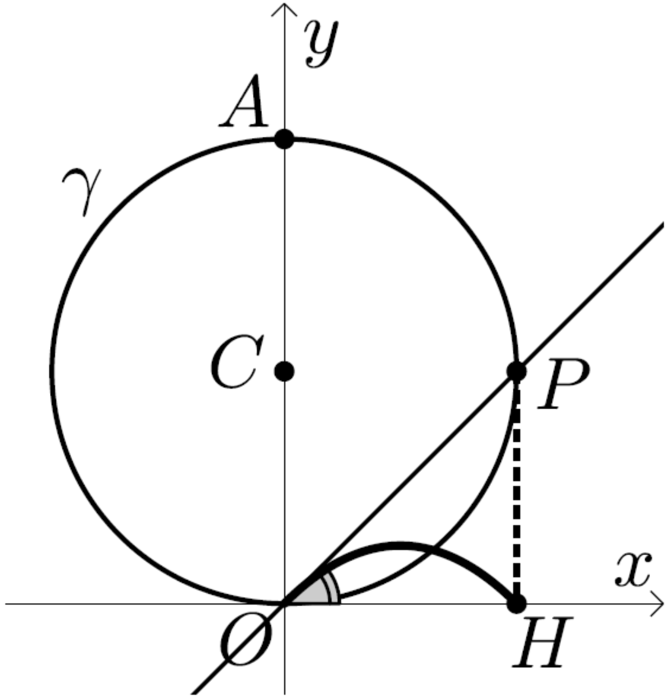


Problema della gittata massima

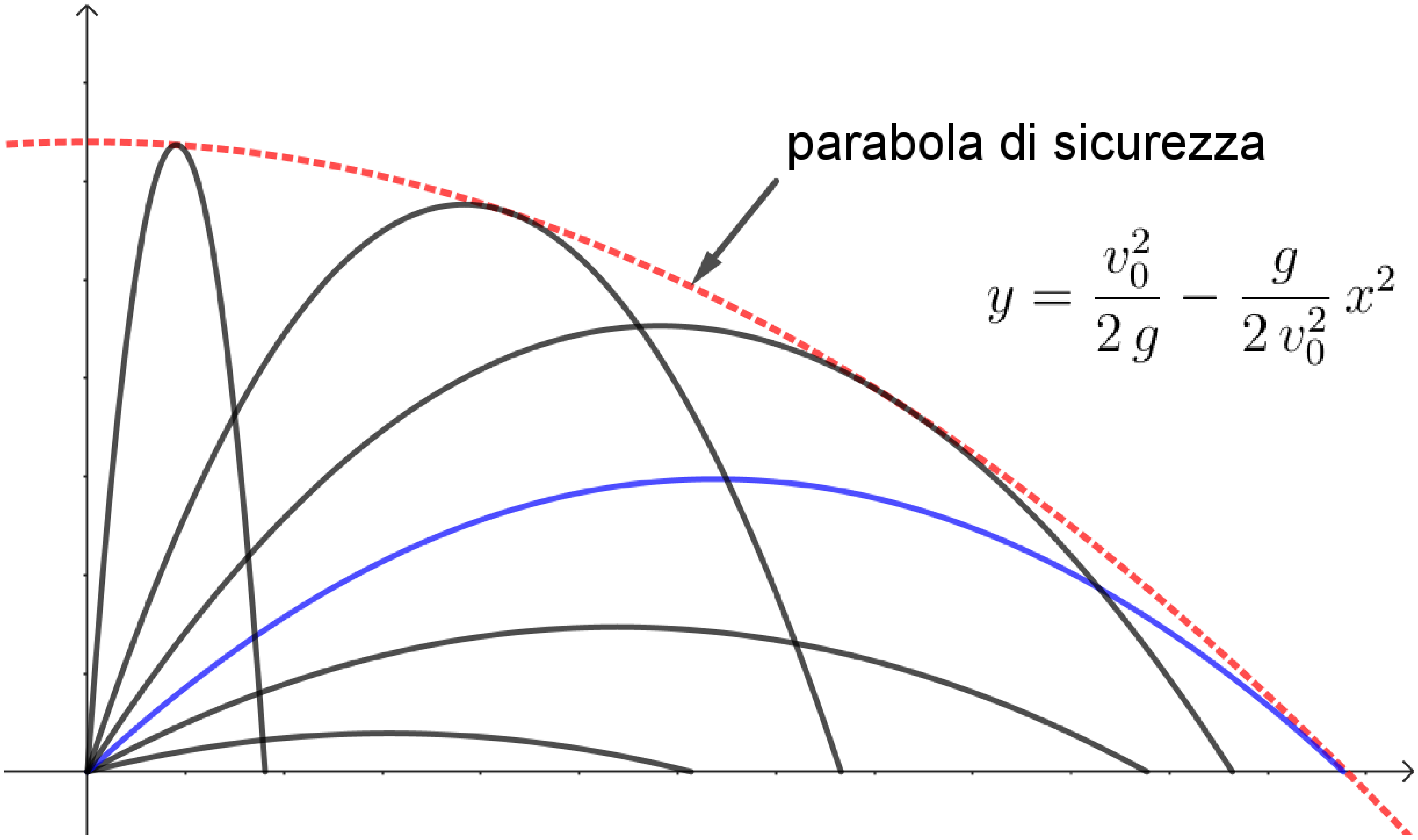
Consideriamo la circonferenza γ di centro $C\left(0\,;\,\dfrac{v_0^2}{g}\right)$ e passante per O.

Intersechiamo γ con la retta $y = x\,\tan\theta$ individuando il punto P



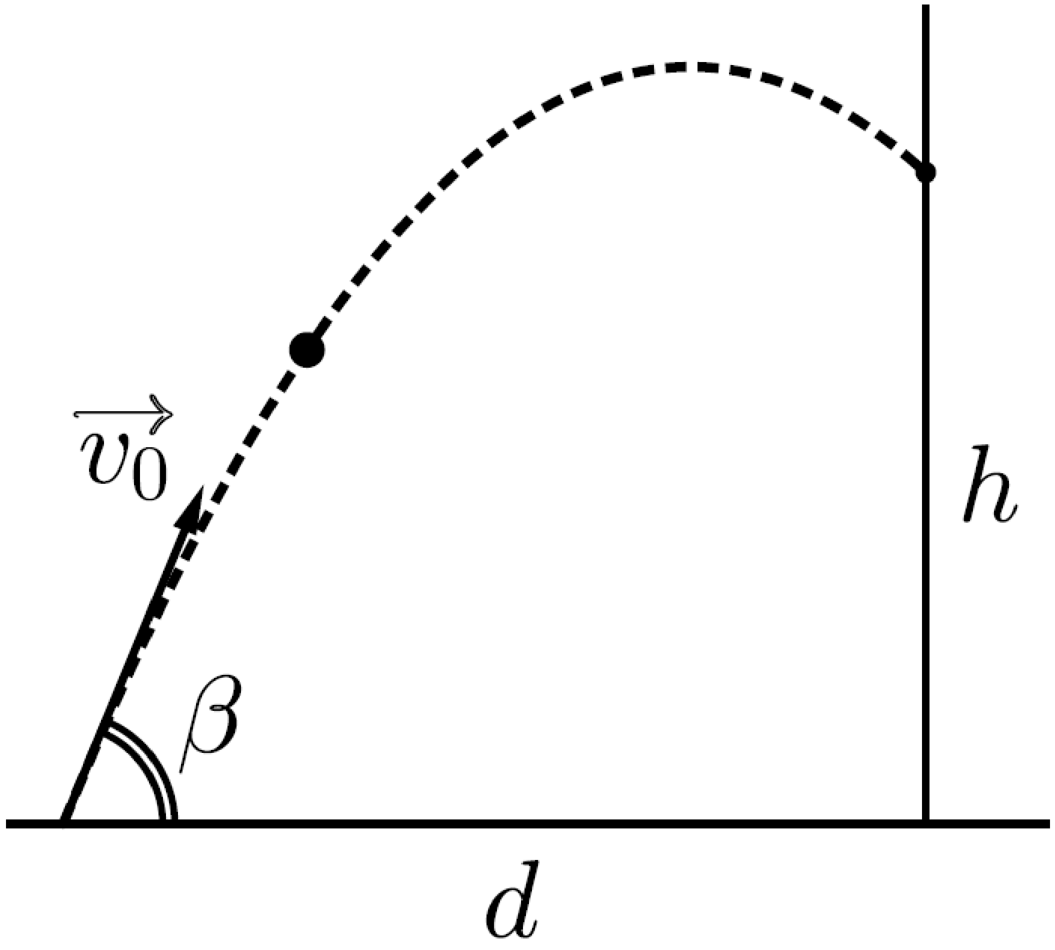


Problema della gittata massima

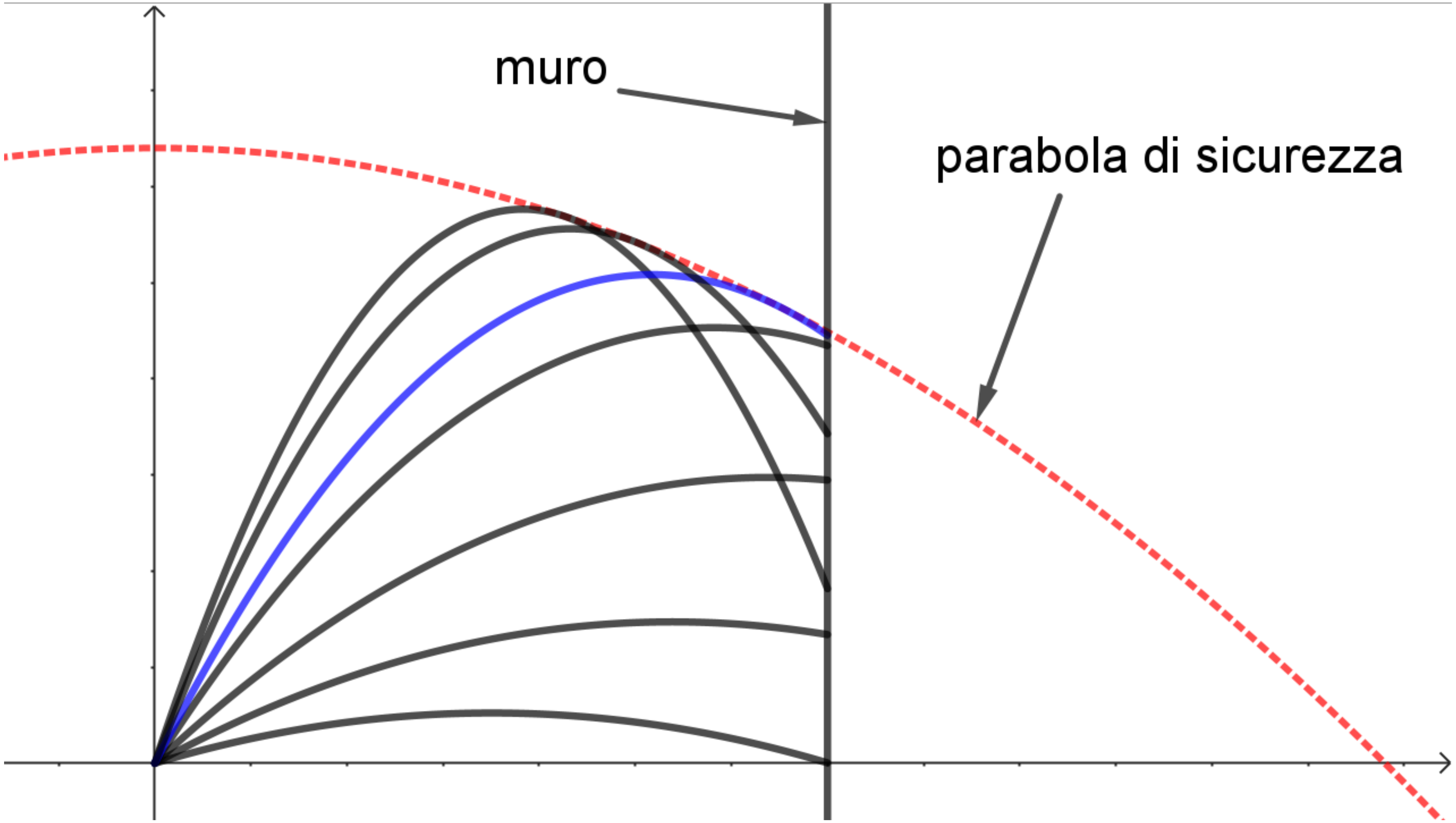


Punto più alto su un muro verticale

Qual è il massimo h, fissato $v_0 > \sqrt{g\,d}$?



Punto più alto su un muro verticale



Punto più alto su un muro verticale

Ponendo $x = d$ nell'equazione della **parabola di sicurezza**:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2\,v_0^2}\,d^2 = \frac{v_0^4 - d^2 g^2}{2\,g\,v_0^2}$$

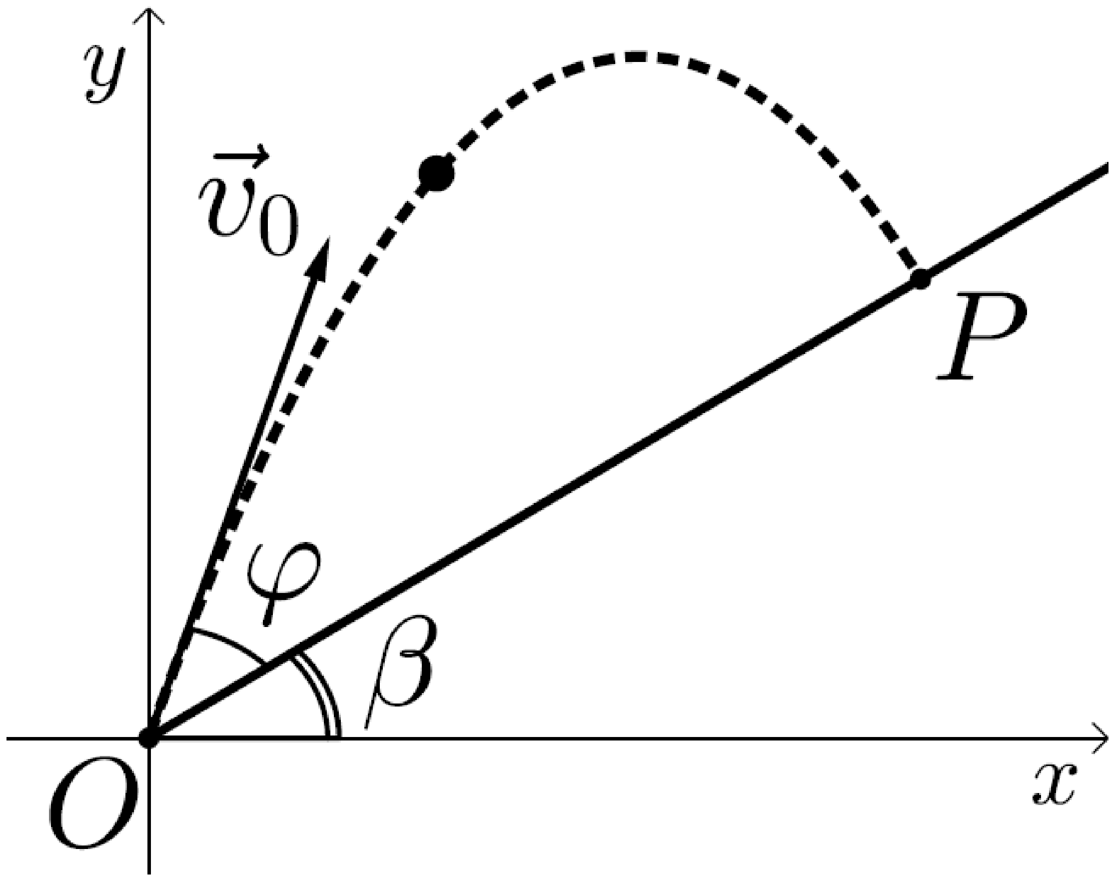
Punto più alto su un muro verticale

L'altezza massima

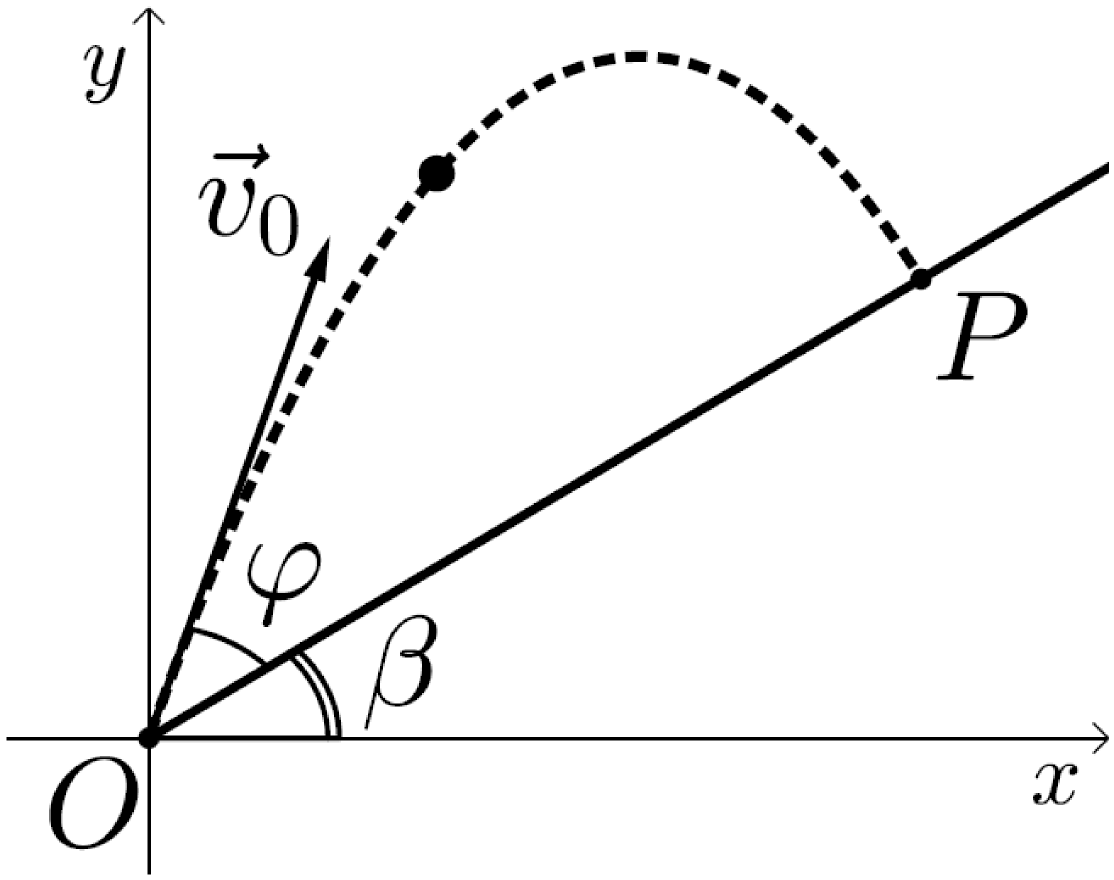
$$y_{\max} = \frac{v_0^4 - d^2 g^2}{2\, g\, v_0^2}$$

è raggiunta con $\beta = \arctan \dfrac{v_0^2}{g\, d} \geqslant \dfrac{\pi}{4}$

Altri problemi risolvibili con la parabola di sicurezza



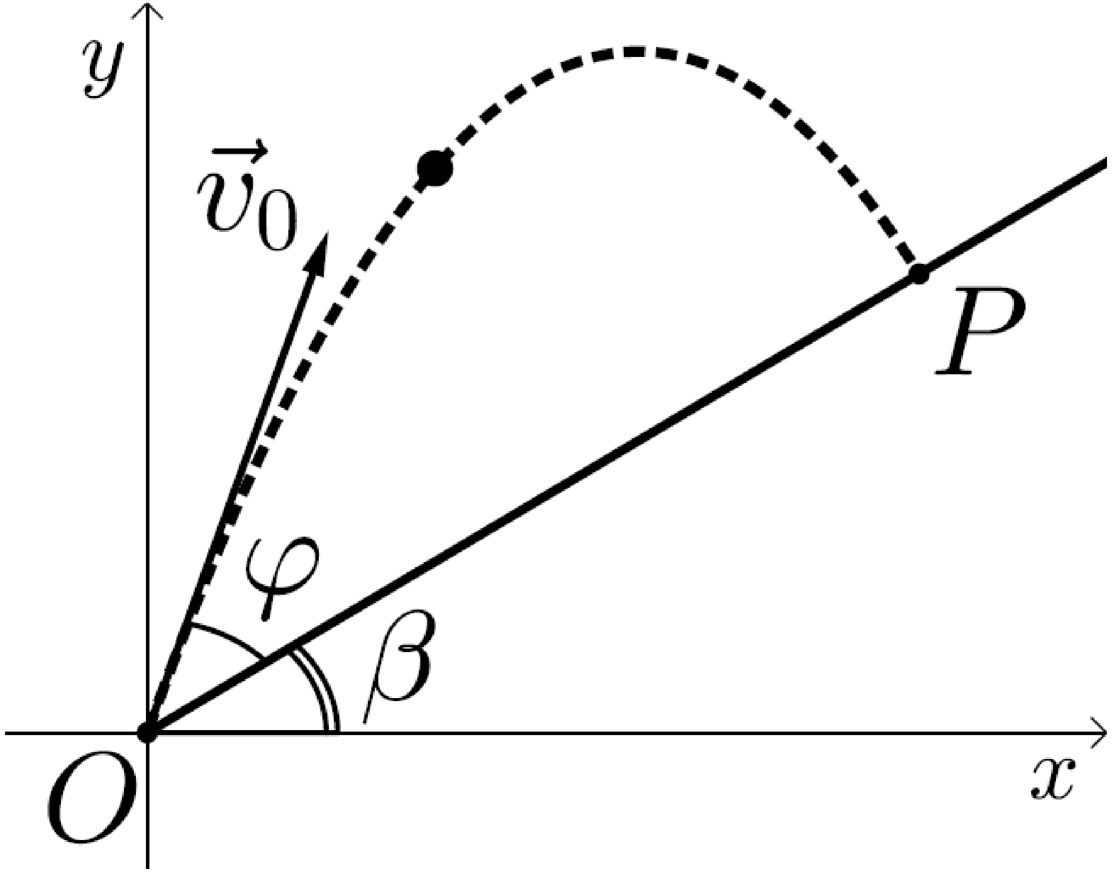
Altri problemi risolvibili con la parabola di sicurezza



L'angolo ottimo di lancio è

$$\varphi^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$$

Altri problemi risolvibili con la parabola di sicurezza

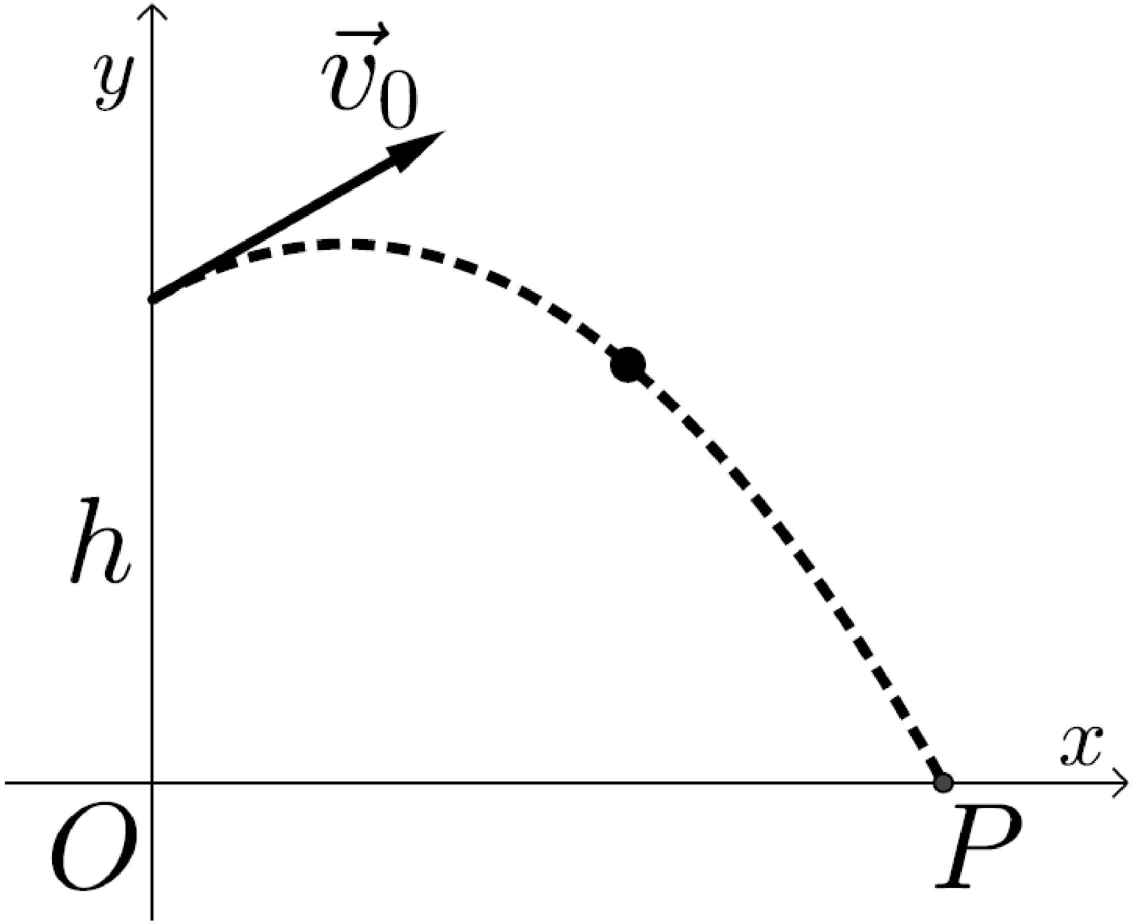


L'angolo ottimo di lancio è

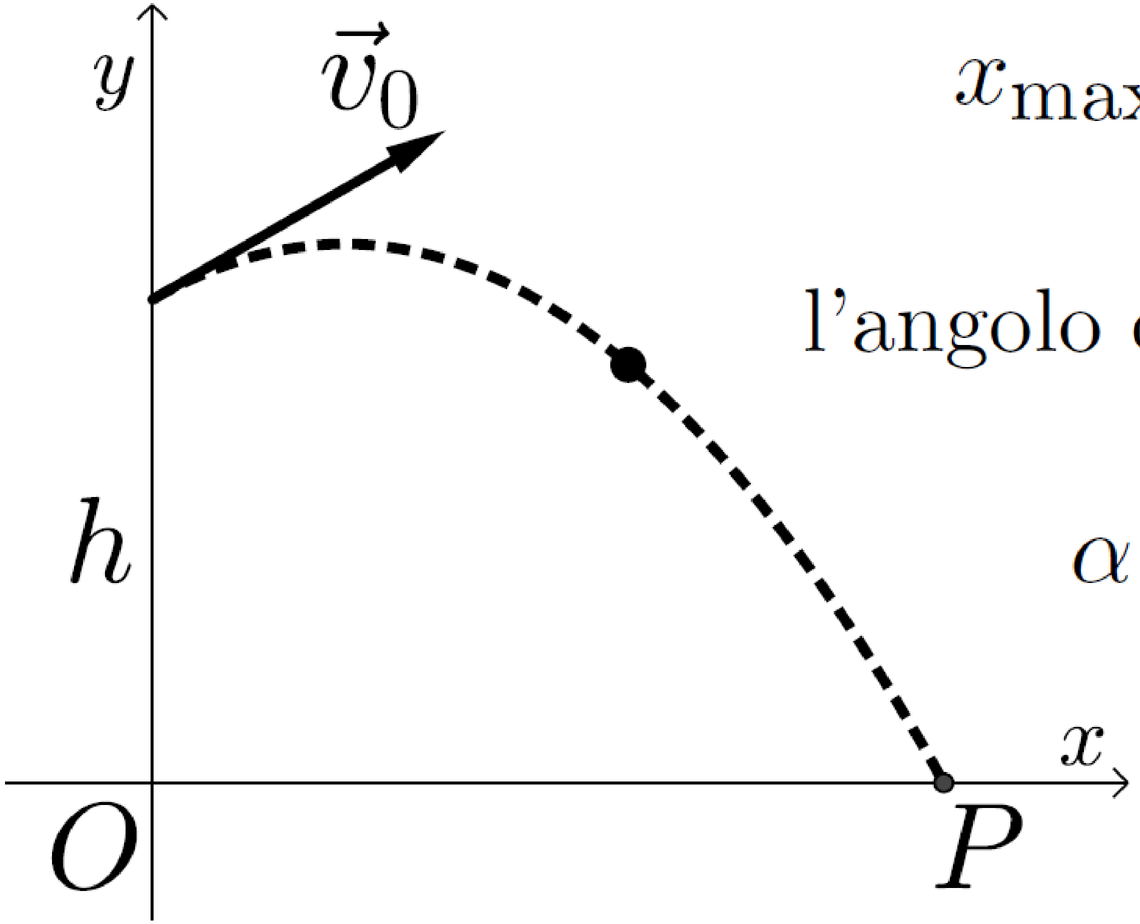
$$\varphi^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$$

La velocità inziale è diretta lungo la bisettrice…

Altri problemi risolvibili con la parabola di sicurezza



Altri problemi risolvibili con la parabola di sicurezza

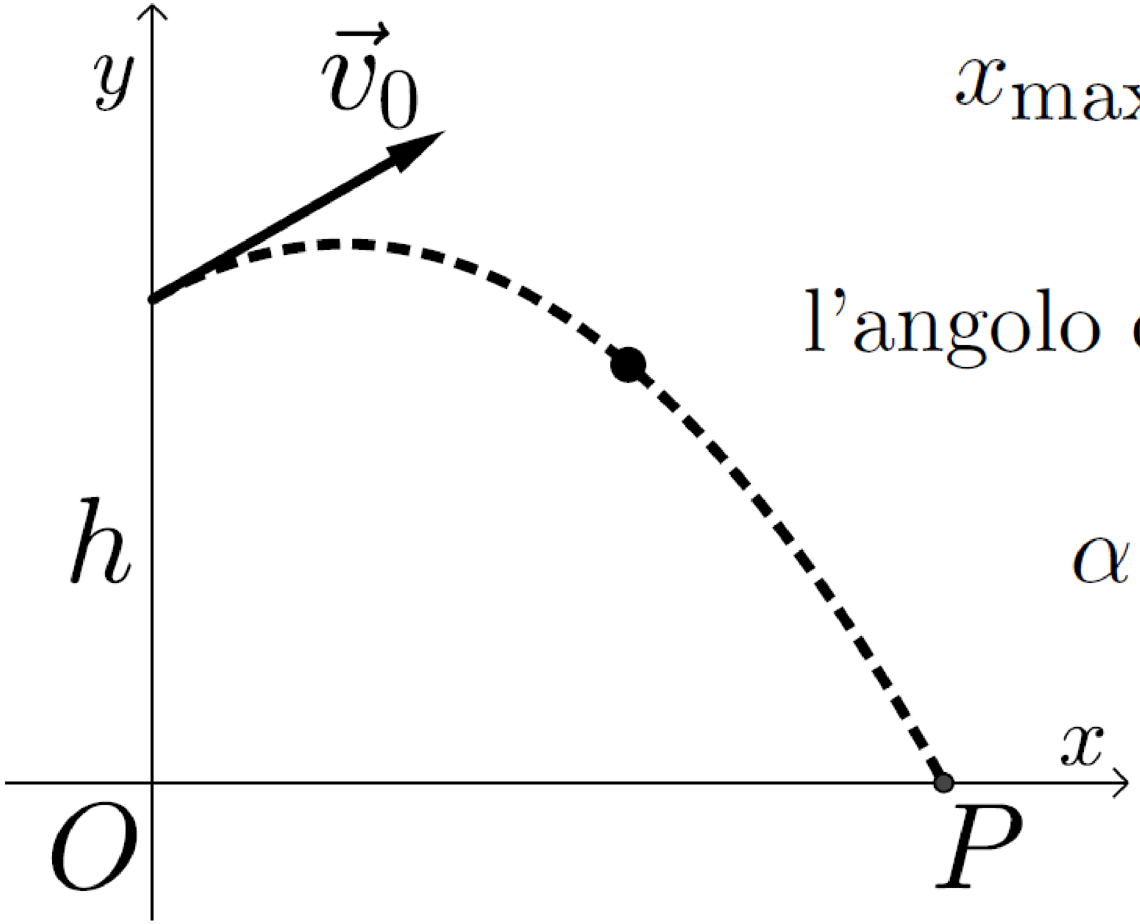


$$x_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

l'angolo ottimo di lancio ha ampiezza

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right)$$

Altri problemi risolvibili con la parabola di sicurezza



$$x_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

l'angolo ottimo di lancio ha ampiezza

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right)$$

Getto del peso: angolo ottimale…

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi area totale S fissa, qual è quello di volume massimo?

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi area totale S fissa, qual è quello di volume massimo?

Indichiamo con x, y, z le misure dei lati

Abbiamo per ipotesi

$$2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z = S$$

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi area totale S fissa, qual è quello di volume massimo?

Massimizziamo

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\text{Volume}^2} &= \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \\ &= \sqrt[3]{(x\,y)(x\,z)(y\,z)}\end{aligned}$$

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi area totale S fissa, qual è quello di volume massimo?

Applichiamo la disuguaglianza **MA-MG**

$$\sqrt[3]{(x\,y)(x\,z)(y\,z)} \leqslant \frac{x\,y + x\,z + y\,z}{3}$$

$$= \frac{S/2}{3} = \frac{S}{6}$$

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi area totale S fissa, qual è quello di volume massimo?

L'uguaglianza vale se $x\,y = x\,z = y\,z$

da cui si ricava $x = y = z \quad \Rightarrow \quad$ **cubo!**

Si determini il tetraedro di volume massimo tra quelli aventi vertici O, A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), con a + 2 b + 3 c = L.

Si determini il tetraedro di volume massimo tra quelli aventi vertici O, A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), con a + 2 b + 3 c = L.

$$V(\mathcal{T}) = \frac{1}{6}abc$$

Si determini il tetraedro di volume massimo tra quelli aventi vertici O, A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), con a + 2 b + 3 c = L.

$$V(\mathcal{T}) = \frac{1}{36}\,a(2\,b)(3\,c)$$

Si determini il tetraedro di volume massimo tra quelli aventi vertici O, A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), con a + 2 b + 3 c = L.

$$V(\mathcal{T}) = \frac{1}{36}\, a(2\, b)(3\, c)$$

Massimizziamo la funzione $\sqrt[3]{a \cdot 2\, b \cdot 3\, c}$

Si determini il tetraedro di volume massimo tra quelli aventi vertici O, A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), con a + 2 b + 3 c = L.

Applichiamo la disuguaglianza **MA-MG**

$$\sqrt[3]{a \cdot 2\,b \cdot 3\,c} \leq \frac{a + 2\,b + 3\,c}{3} = \frac{L}{3}$$

Si determini il tetraedro di volume massimo tra quelli aventi vertici O, A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), con a + 2 b + 3 c = L.

dove l'uguag. vale se $\begin{cases} a = 2\,b \\ 2\,b = 3\,c \\ a + 2\,b + 3\,c = L \end{cases}$

valori ottimi:

$$a = \frac{L}{3} \qquad b = \frac{L}{6} \qquad c = \frac{L}{9}$$

Minimo della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx)}{xyz}$$

dove x, y, z sono numeri reali positivi.

Minimo di f(x,y,z)

Riscriviamo in modo equivalente la funzione

$$f(x, y, z) = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Minimo di f(x,y,z)

per la disuguaglianza **MA-MH** abbiamo

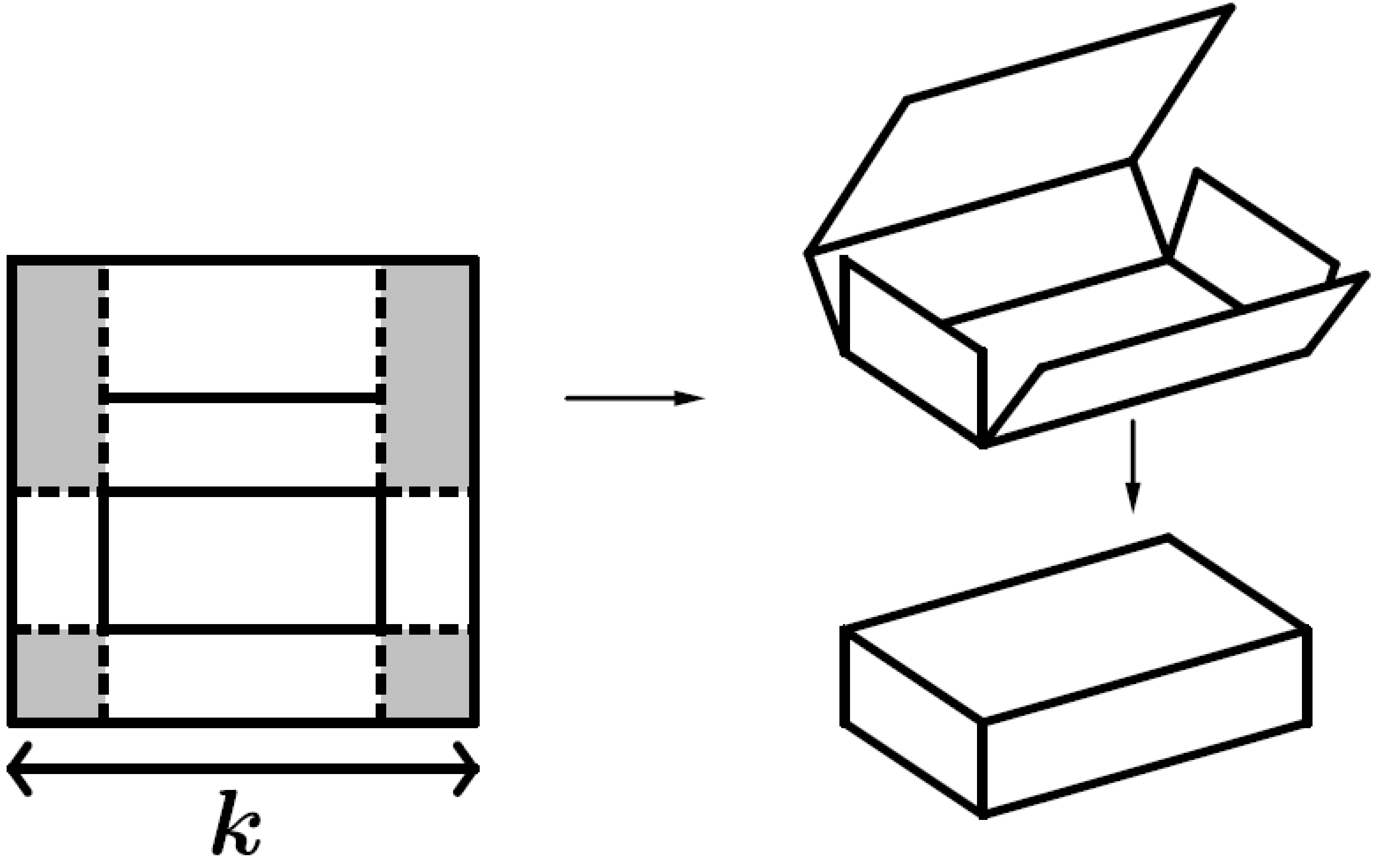
$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}$$

Minimo di f(x,y,z)

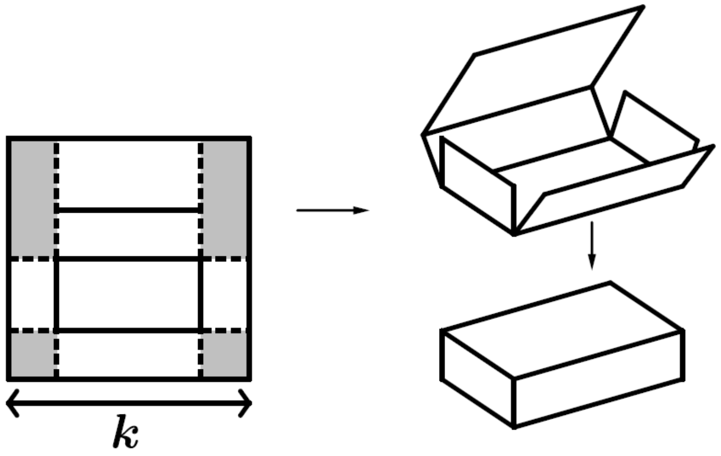
$$f(x,y,z) = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9$$

l'uguaglianza vale se e solo se $x = y = z$

Scatola di volume massimo

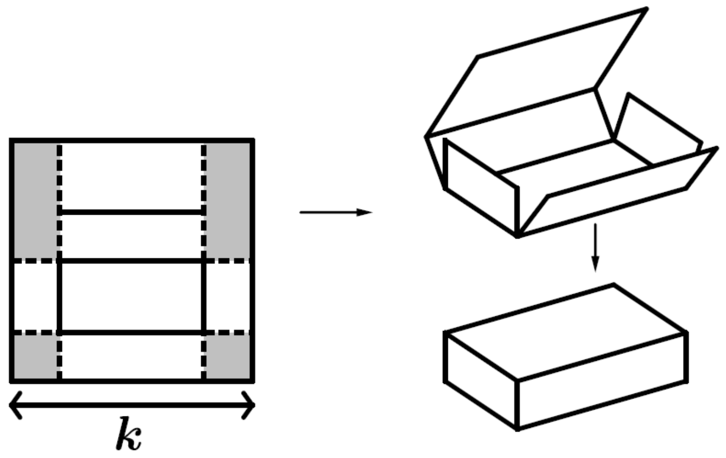


Scatola di volume massimo



indico con x il lato dei quadratini da ritagliare

Scatola di volume massimo

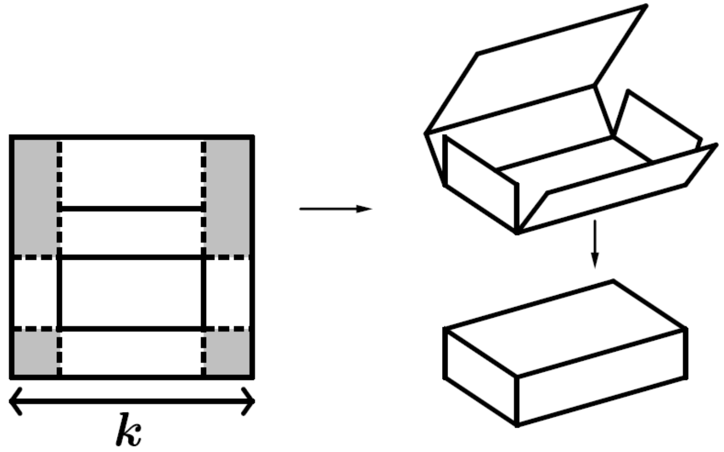


$$V(x) = x\,(k - 2\,x)\left(\frac{k}{2} - x\right) = \frac{1}{2}\,x\,(k - 2\,x)^2$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 4\,x \cdot (k - 2\,x) \cdot (k - 2\,x)$$

$$4\,x = k - 2\,x$$

Scatola di volume massimo



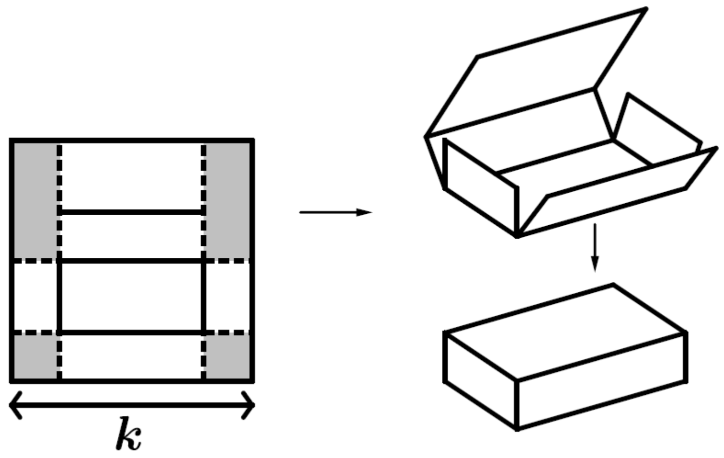
$$V(x) = x\,(k-2\,x)\left(\frac{k}{2}-x\right) = \frac{1}{2}\,x\,(k-2\,x)^2$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 4\,x\cdot(k-2\,x)\cdot(k-2\,x)$$

$$4\,x = k-2\,x \qquad x = \frac{k}{6}$$

Scatola di volume massimo

$$V_{\max} = \frac{k^3}{27}$$



$$V(x) = x\,(k - 2\,x)\left(\frac{k}{2} - x\right) = \frac{1}{2}\,x\,(k - 2\,x)^2$$

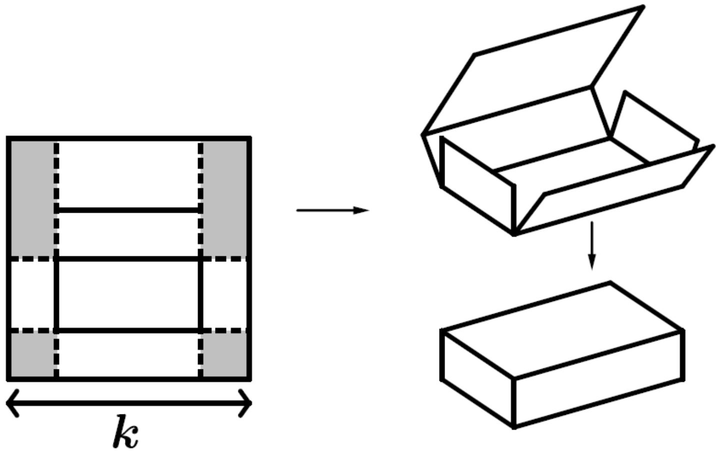
$$= \frac{1}{8}\cdot 4\,x \cdot (k - 2\,x)\cdot(k - 2\,x)$$

$$4\,x = k - 2\,x$$

$$x = \frac{k}{6}$$

Scatola di volume massimo

$$V_{\max} = \frac{k^3}{27}$$



$$a = \frac{k}{6}\,,\; b = \frac{k}{3}\,,\; c = \frac{2\,k}{3}$$

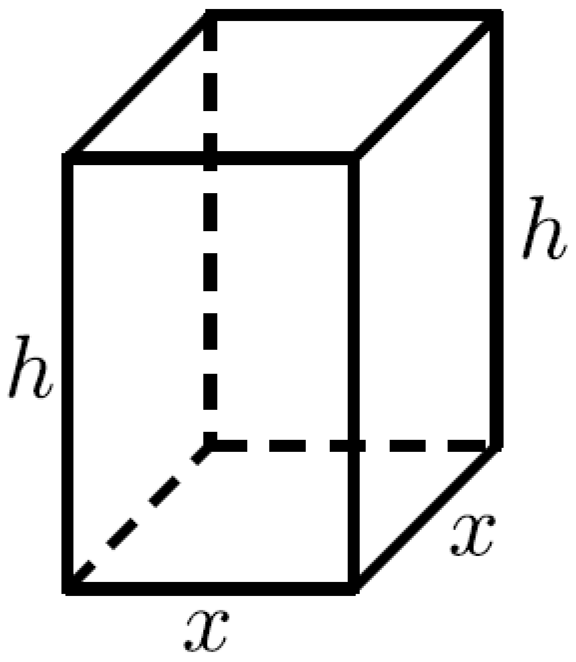
$$V(x) \;=\; x\,(k-2\,x)\left(\frac{k}{2}-x\right) = \frac{1}{2}\,x\,(k-2\,x)^2$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 4\,x\cdot(k-2\,x)\cdot(k-2\,x)$$

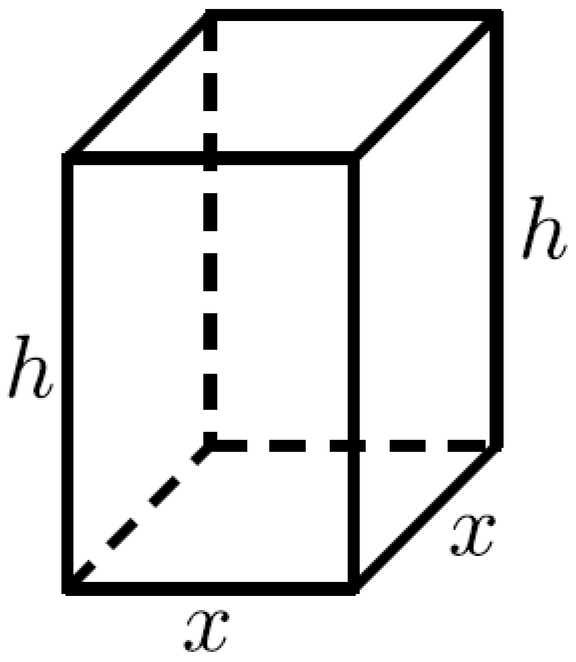
$$4\,x = k - 2\,x$$

$$x = \frac{k}{6}$$

Tra i parallelepipedi rettangoli aventi per base un quadrato e di volume assegnato *V*, si determini quello di superficie totale minima.



Tra i parallelepipedi rettangoli aventi per base un quadrato e di volume assegnato *V*, si determini quello di superficie totale minima.

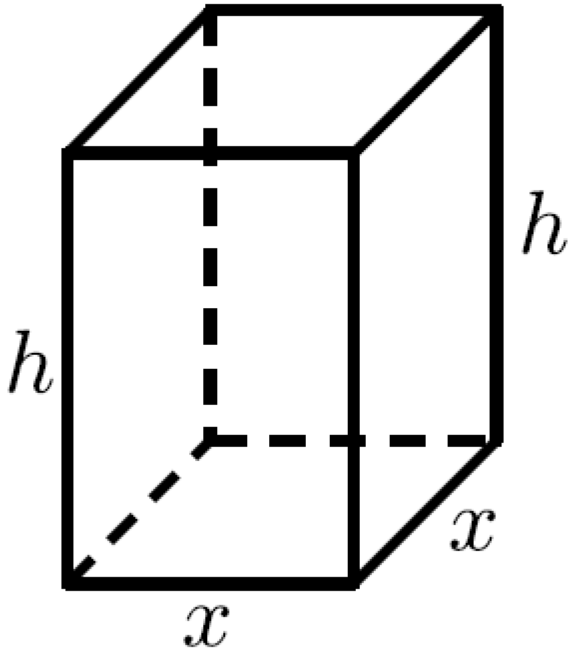


$$V = h\,x^2 \qquad h = \frac{V}{x^2}$$

$$S(x) = 2\,x^2 + 4\,x\,h = 2\,x^2 + \frac{4\,V}{x}$$

$$= 2\,x^2 + \frac{2\,V}{x} + \frac{2\,V}{x}$$

Tra i parallelepipedi rettangoli aventi per base un quadrato e di volume assegnato *V*, si determini quello di superficie totale minima.

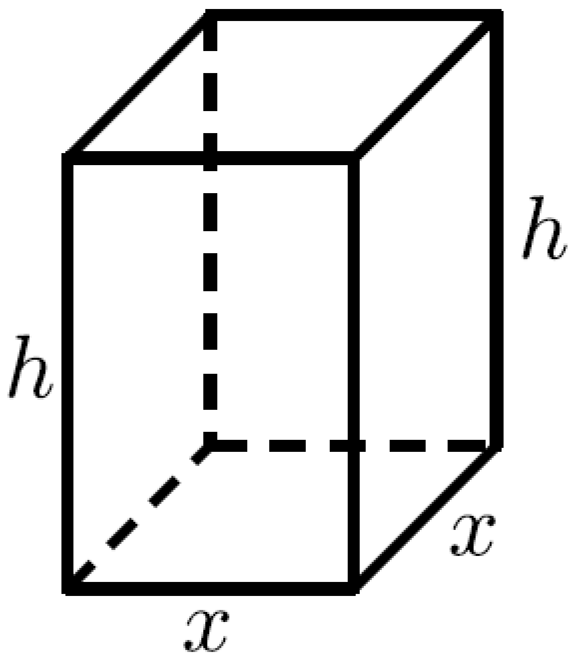


$$S(x) = 2\,x^2 + \frac{2\,V}{x} + \frac{2\,V}{x}$$

gli addendi hanno prodotto costante:

$$2\,x^2 \cdot \frac{2\,V}{x} \cdot \frac{2\,V}{x} = 2\,\cancel{x^2} \cdot \frac{2\,V}{\cancel{x}} \cdot \frac{2\,V}{\cancel{x}} = 8\,V^2$$

Tra i parallelepipedi rettangoli aventi per base un quadrato e di volume assegnato *V*, si determini quello di superficie totale minima.

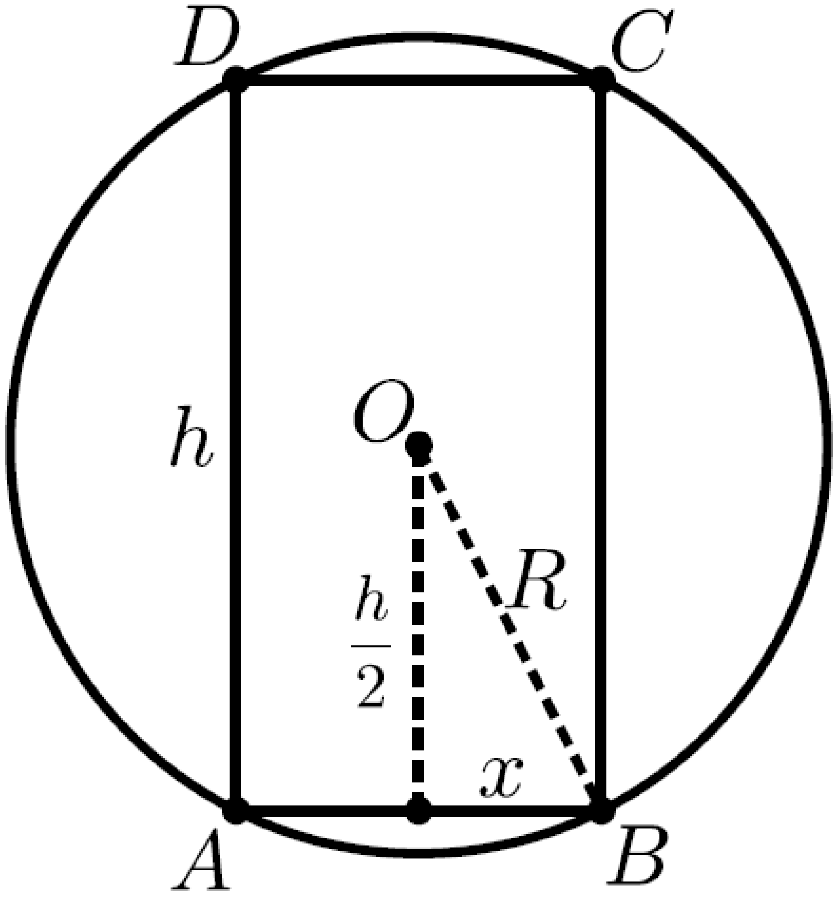


$$2\,x^2 = \frac{2\,V}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{V}$$

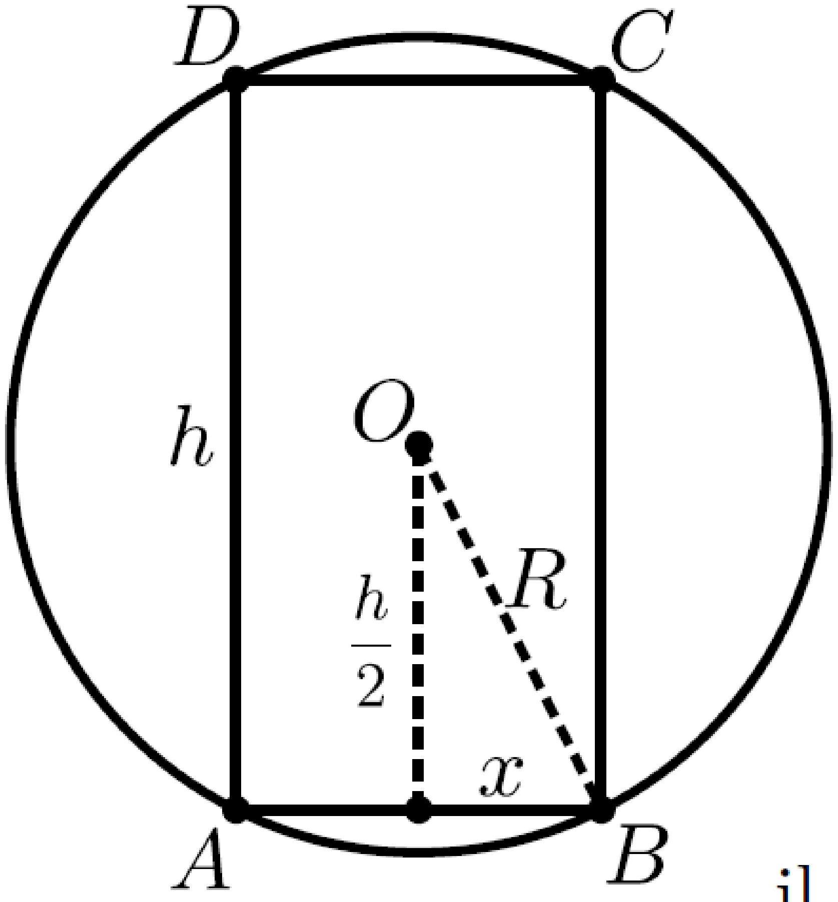
cubo.

Tra i cilindri retti inscritti in una sfera di raggio $\boldsymbol{R}$, determinare quello avente superficie laterale massima.

Tra i cilindri retti inscritti in una sfera di raggio *R*, determinare quello avente superficie laterale massima.



Tra i cilindri retti inscritti in una sfera di raggio *R*, determinare quello avente superficie laterale massima.



$$h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} S_L(x) &= 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \\ &= 4\pi\sqrt{R^2 x^2 - x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= R^2 x^2 - x^4 \\ &= \frac{R^2}{4} - \left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

il massimo si ha per $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Fra tutti i cilindri retti inscritti in una sfera di raggio *R*, si determini quello avente volume massimo.

Fra tutti i cilindri retti inscritti in una sfera di raggio *R*, si determini quello avente volume massimo.

stavolta conviene porre $2\,x =$ altezza del cilindro

il raggio è $r = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad 0 < x < R$

$$V(x) = \pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \cdot 2\,x = 2\,\pi\,x\left(R^2 - x^2\right)$$

$$f(x) = x\left(R^2 - x^2\right)$$

$$g(x) = \left(f(x)\right)^2$$

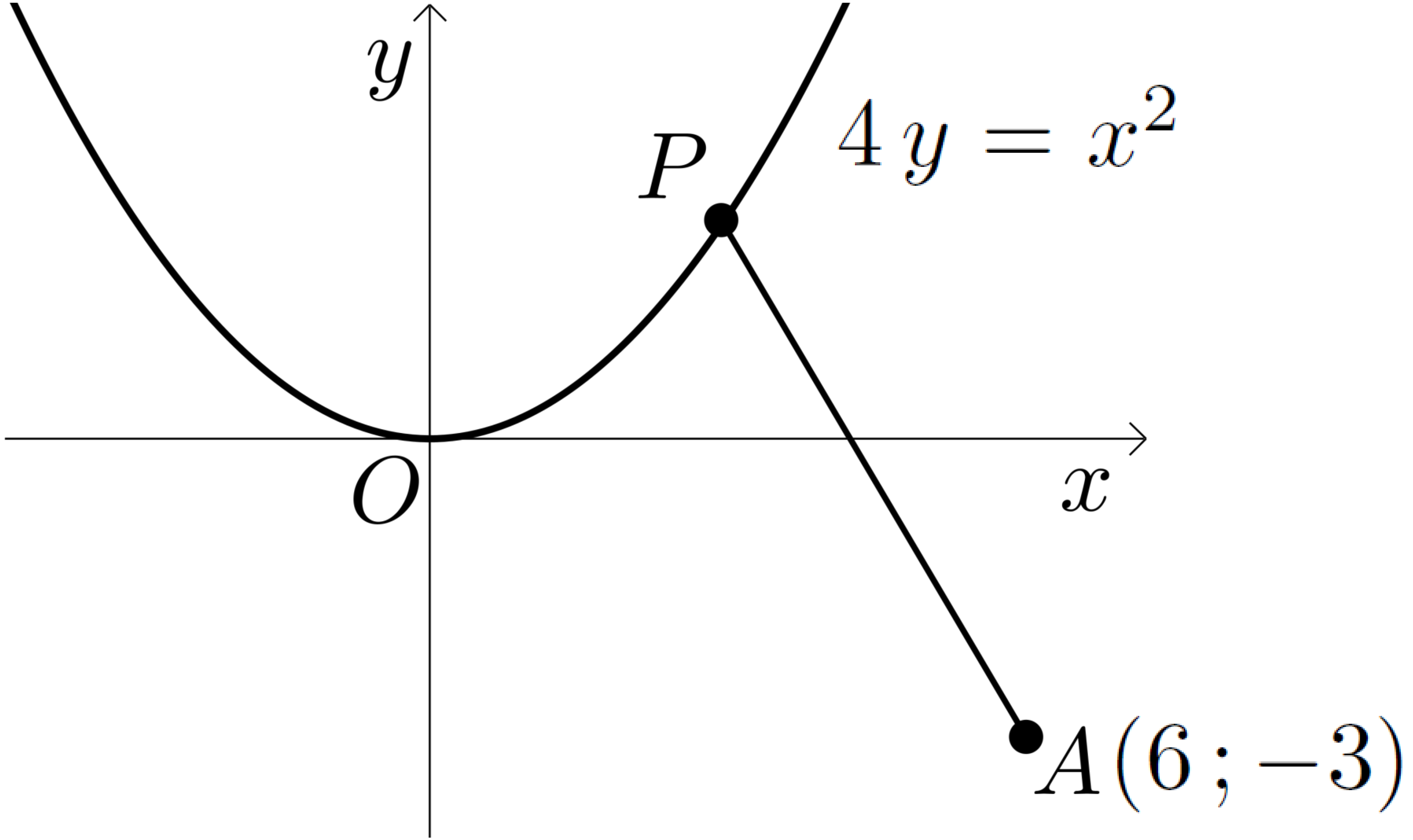
$$g(x) = x^2\left(R^2 - x^2\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\,x^2 \cdot \left(R^2 - x^2\right)\cdot\left(R^2 - x^2\right)$$

Fra tutti i cilindri retti inscritti in una sfera di raggio *R*, si determini quello avente volume massimo.

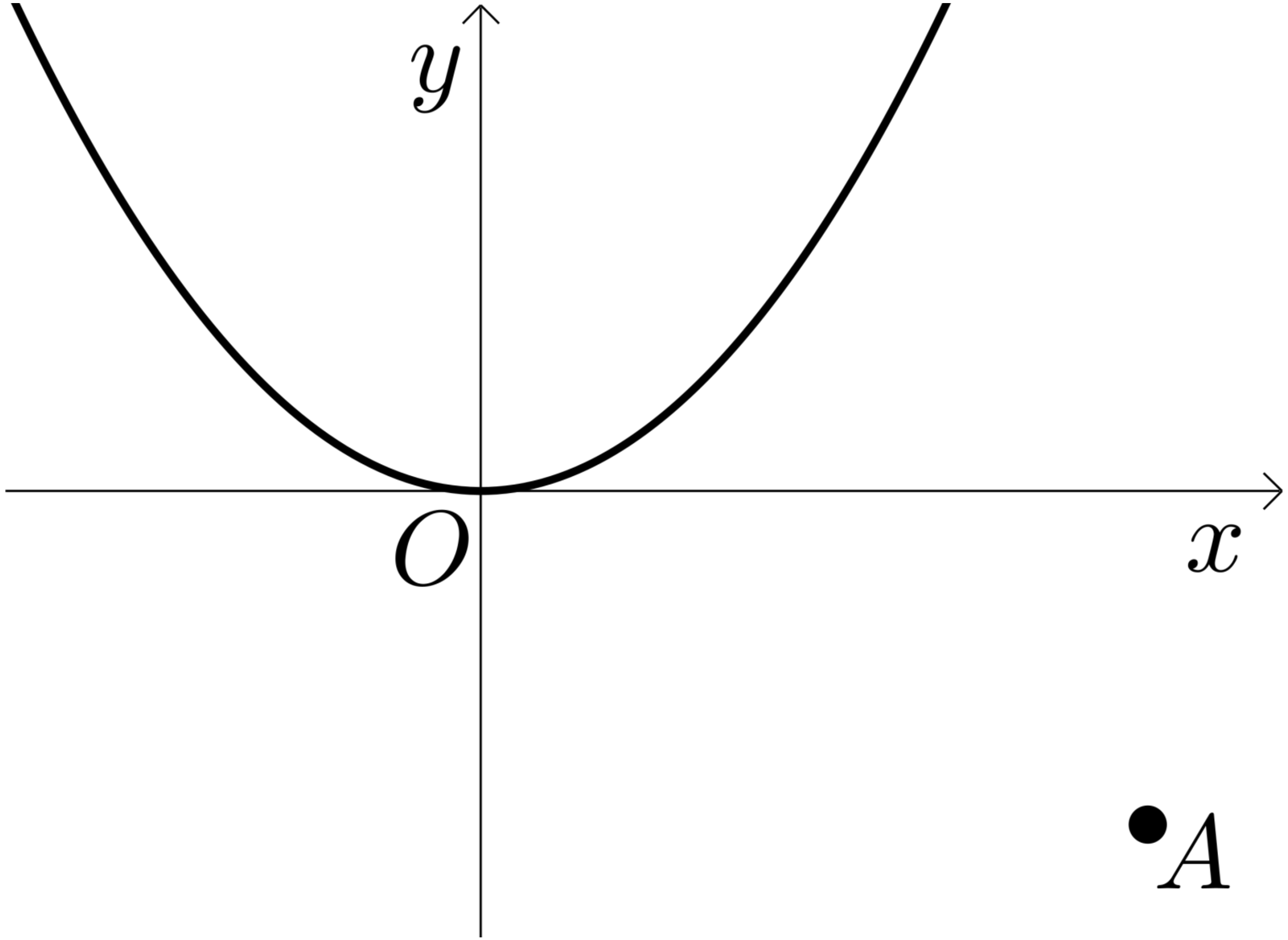
$$g(x) = x^2\left(R^2 - x^2\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2x^2 \cdot \left(R^2 - x^2\right)\cdot\left(R^2 - x^2\right)$$

$$2x^2 = R^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

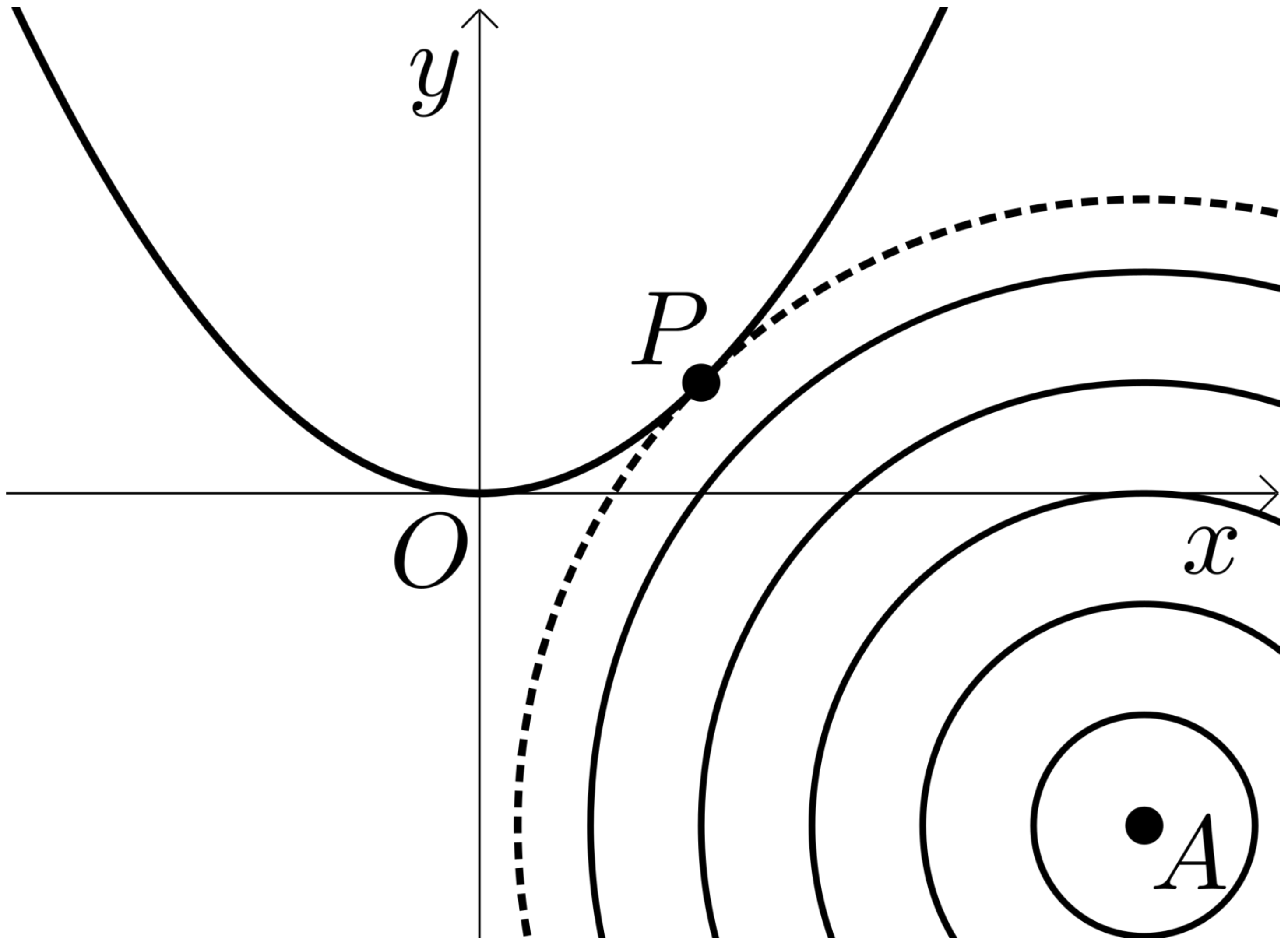
Punto di una curva più vicino a un altro punto



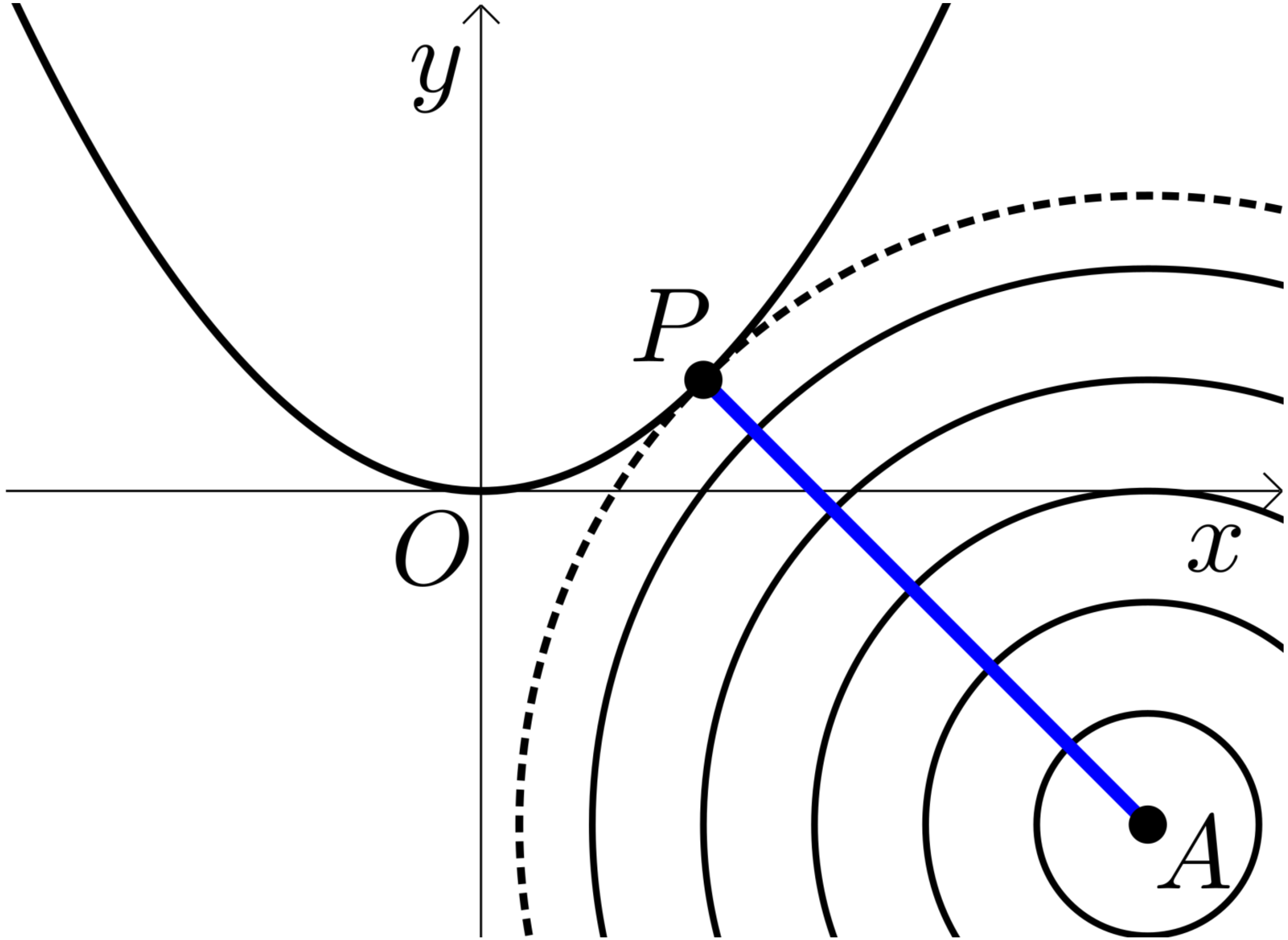
Punto di una curva più vicino a un altro punto



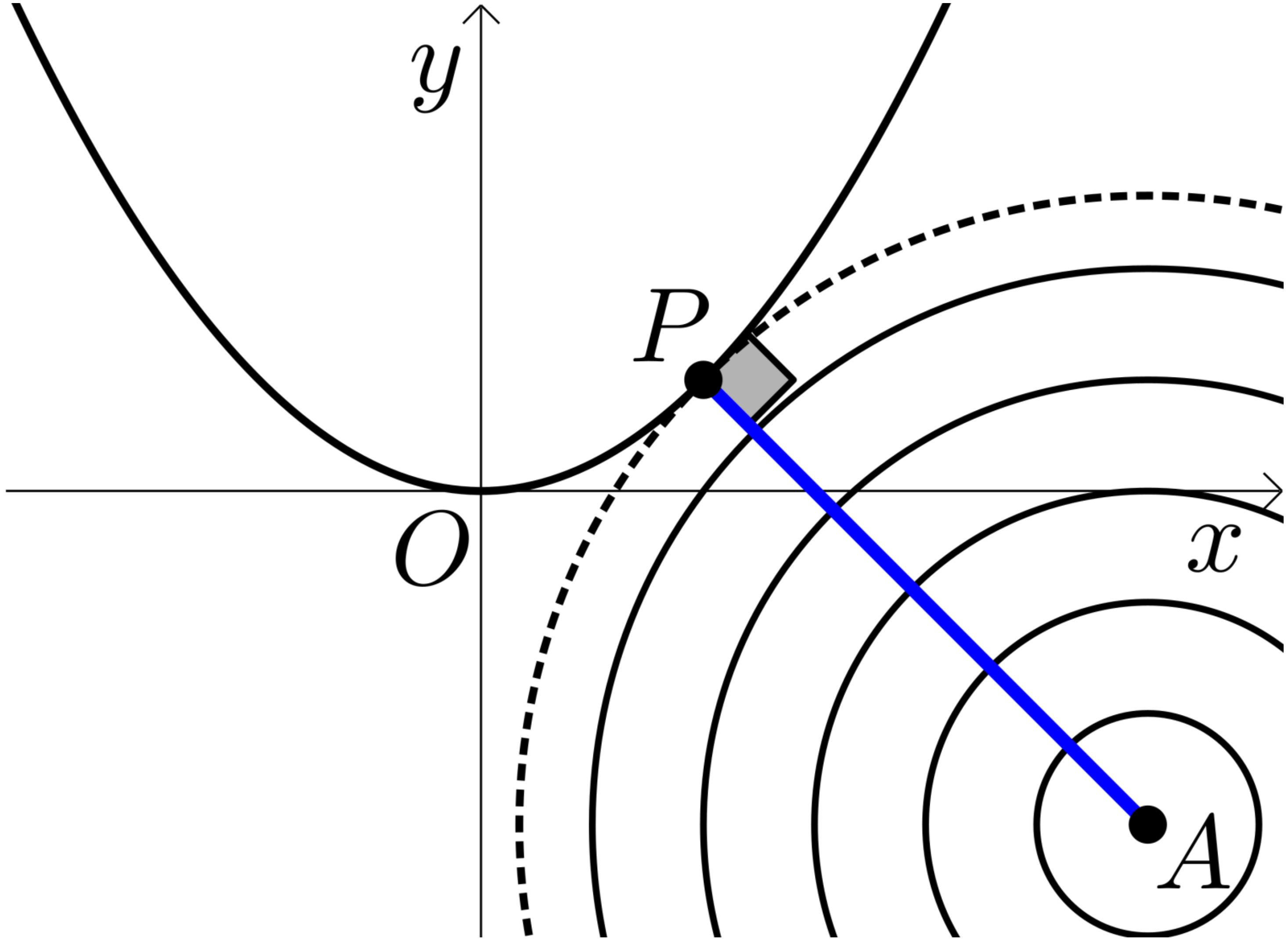
Punto di una curva più vicino a un altro punto



Punto di una curva più vicino a un altro punto

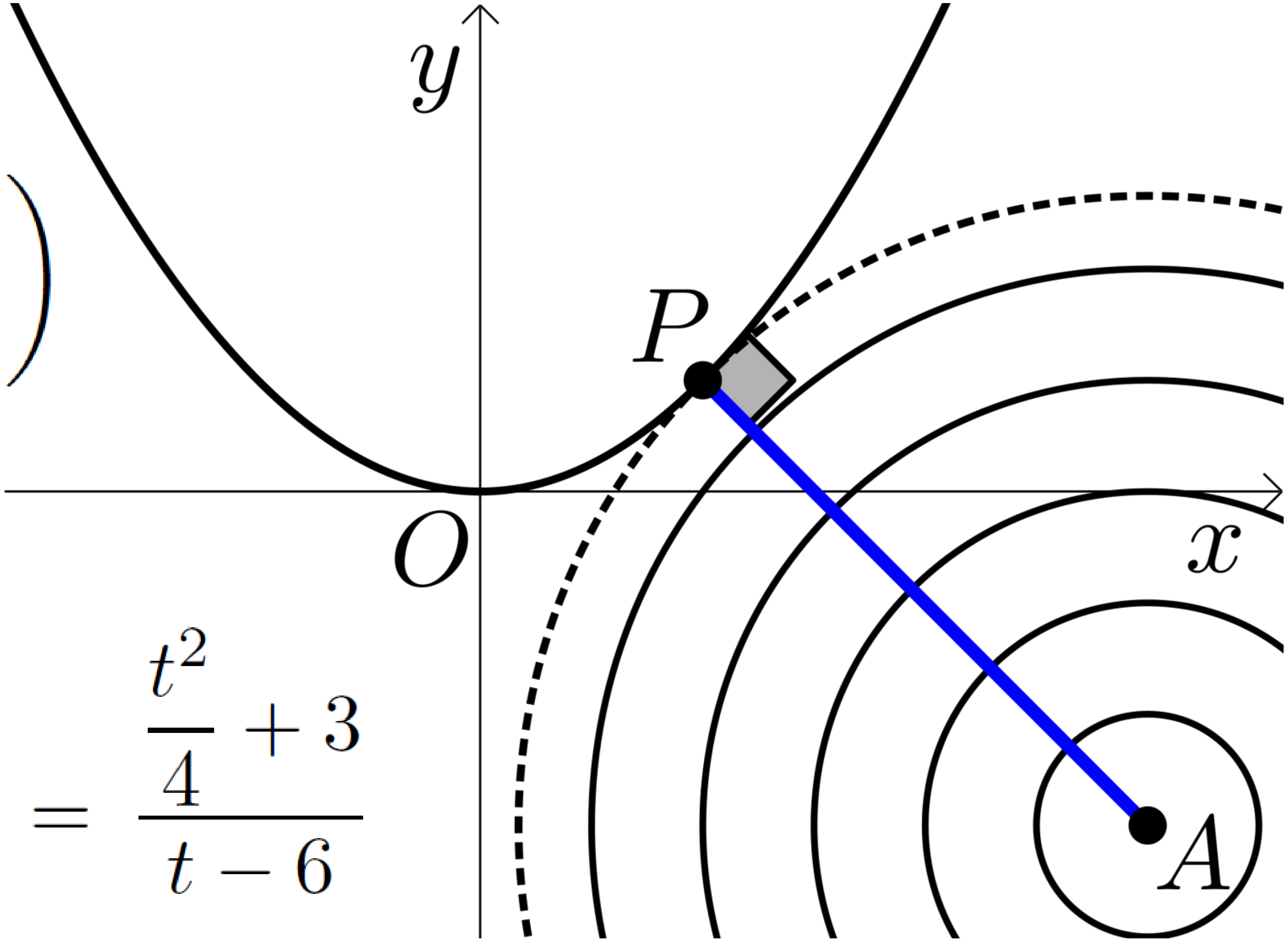


Punto di una curva più vicino a un altro punto



Punto di una curva più vicino a un altro punto

$$P\left(t\,;\,\frac{t^2}{4}\right)$$



$$m_P = \frac{1}{2}\,t$$

$$\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\dfrac{t^2}{4} + 3}{t - 6}$$

Punto di una curva più vicino a un altro punto

$$\frac{1}{2}\,t \cdot \frac{t^2+12}{4\,t-24} = -1 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Punto di una curva più vicino a un altro punto

$$\frac{1}{2}\,t\cdot\frac{t^2+12}{4\,t-24}=-1 \quad\Rightarrow\quad t=2$$

$$\frac{t^3+20\,t-48}{8\,(t-6)}=0$$

$$\frac{(t-2)(t^2+2\,t+24)}{8\,(t-6)}=0$$

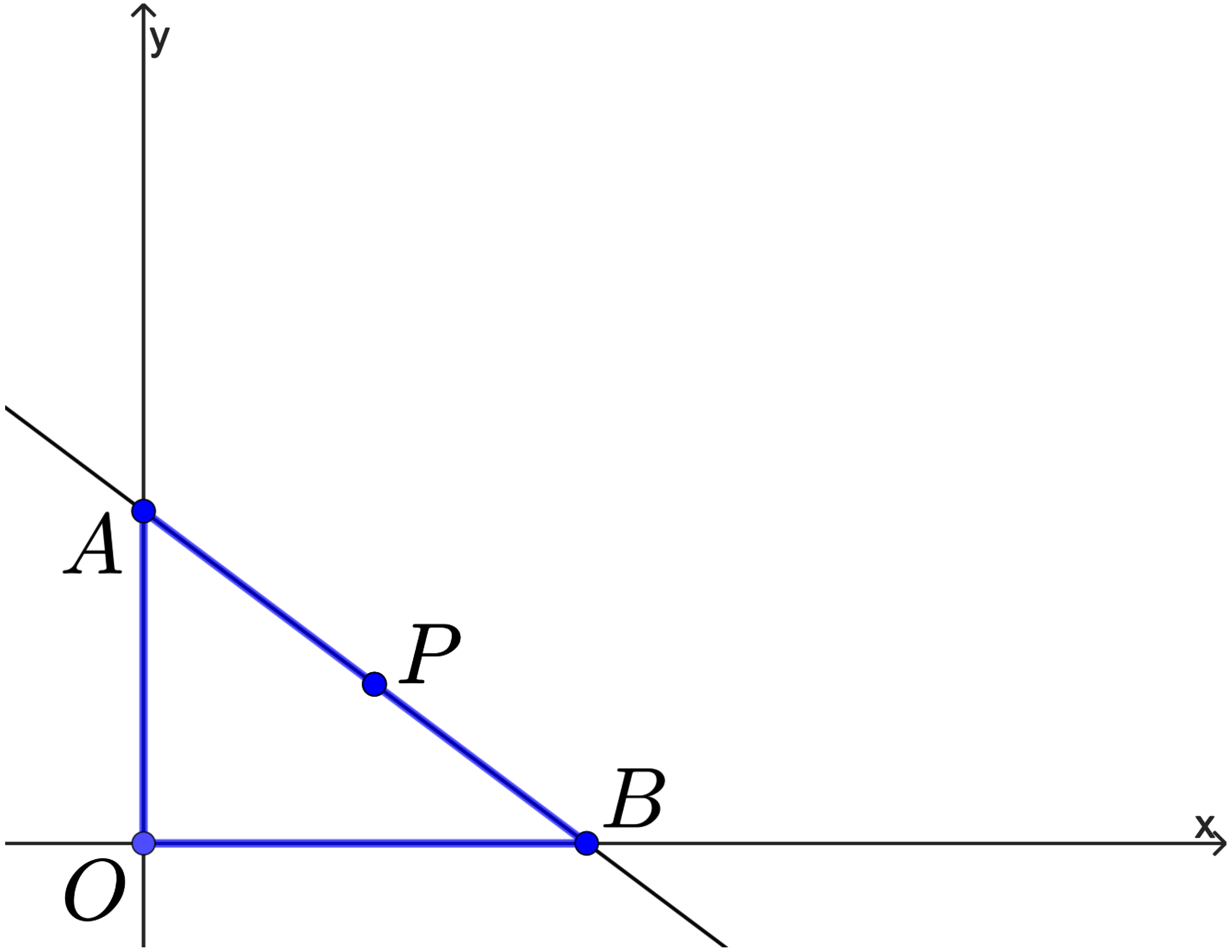
Punto di una curva più vicino a un altro punto

$$\ell = \sqrt{(t-6)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + 3\right)^2}$$

se deriviamo il radicando $f(t)$

$$f'(t) = \frac{1}{4}t^3 + 5t - 12 = \frac{1}{4}(t-2)\left(t^2 + 2t + 24\right)$$

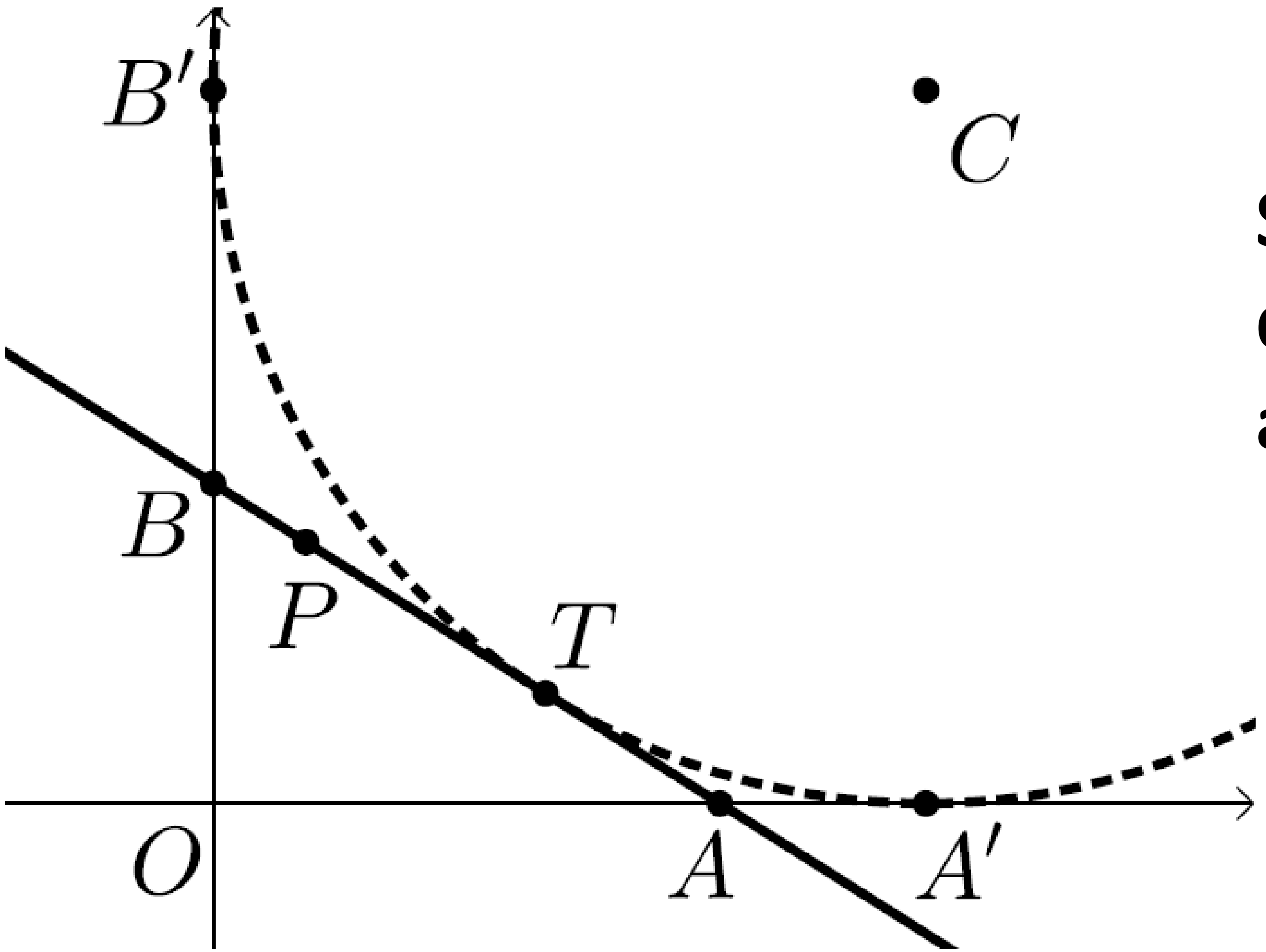
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



Triangolo rettangolo di minimo perimetro

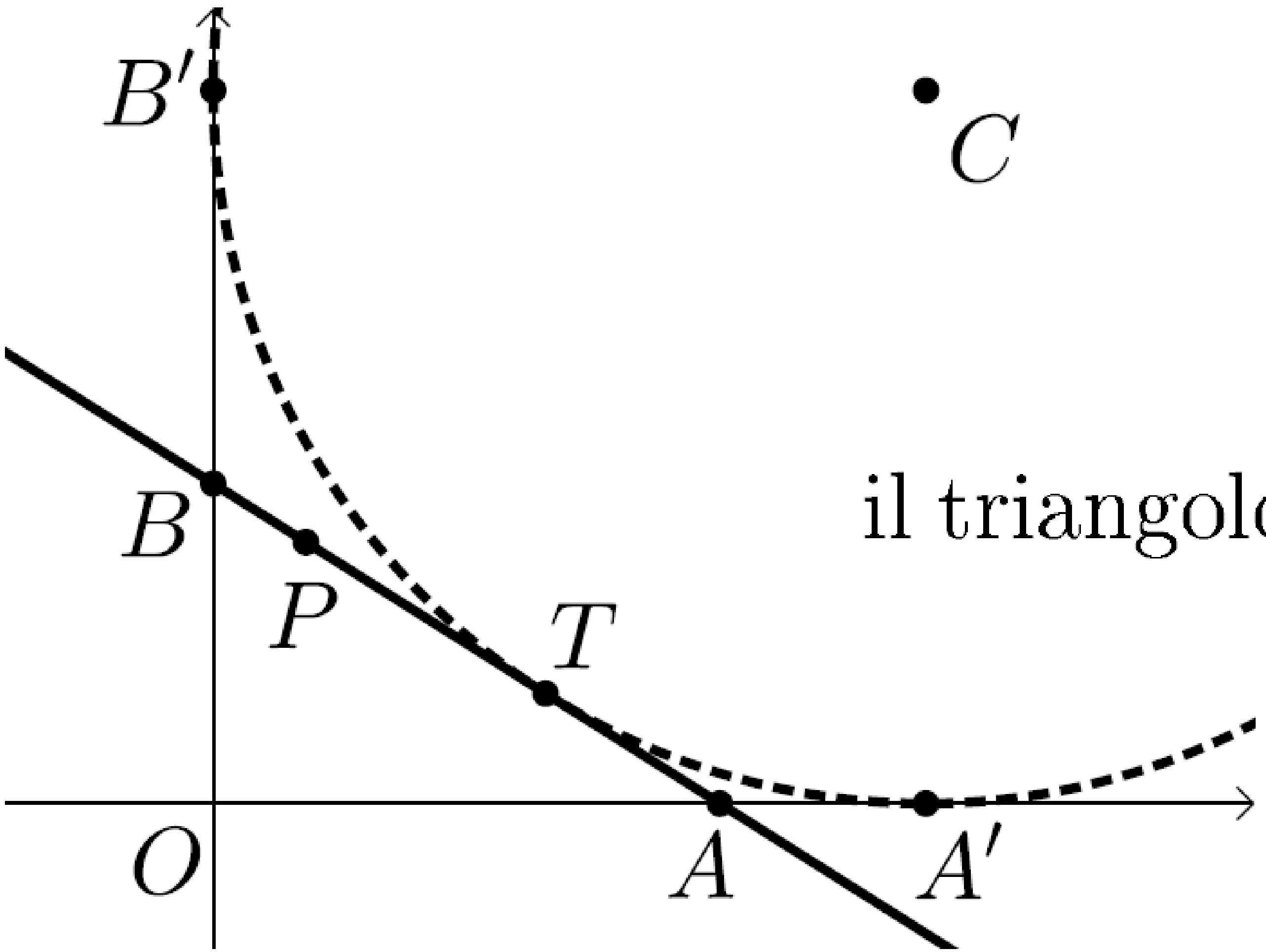
Soluzione geometrica…

Triangolo rettangolo di minimo perimetro



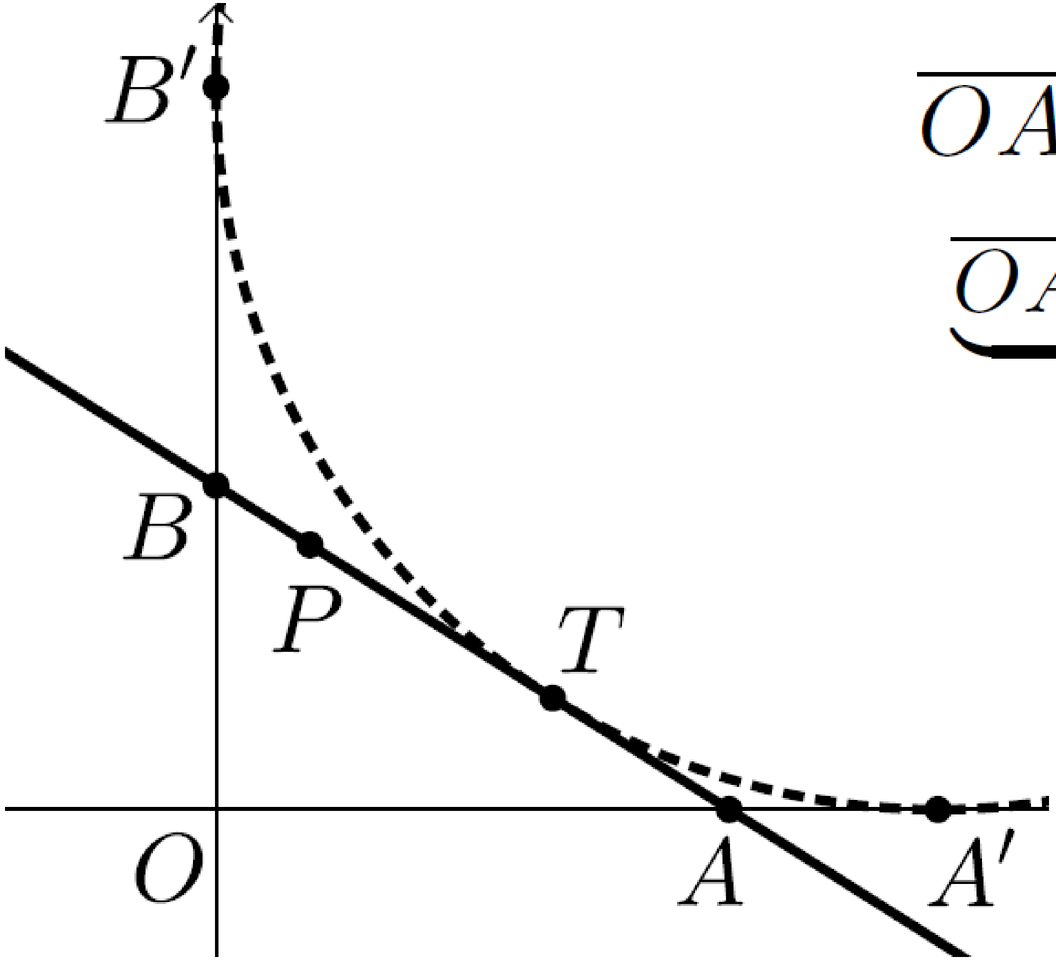
Si considera la circonferenza di raggio p e tangente agli assi cartesiani

Triangolo rettangolo di minimo perimetro



il triangolo OAB ha perimetro $2p$

Triangolo rettangolo di minimo perimetro



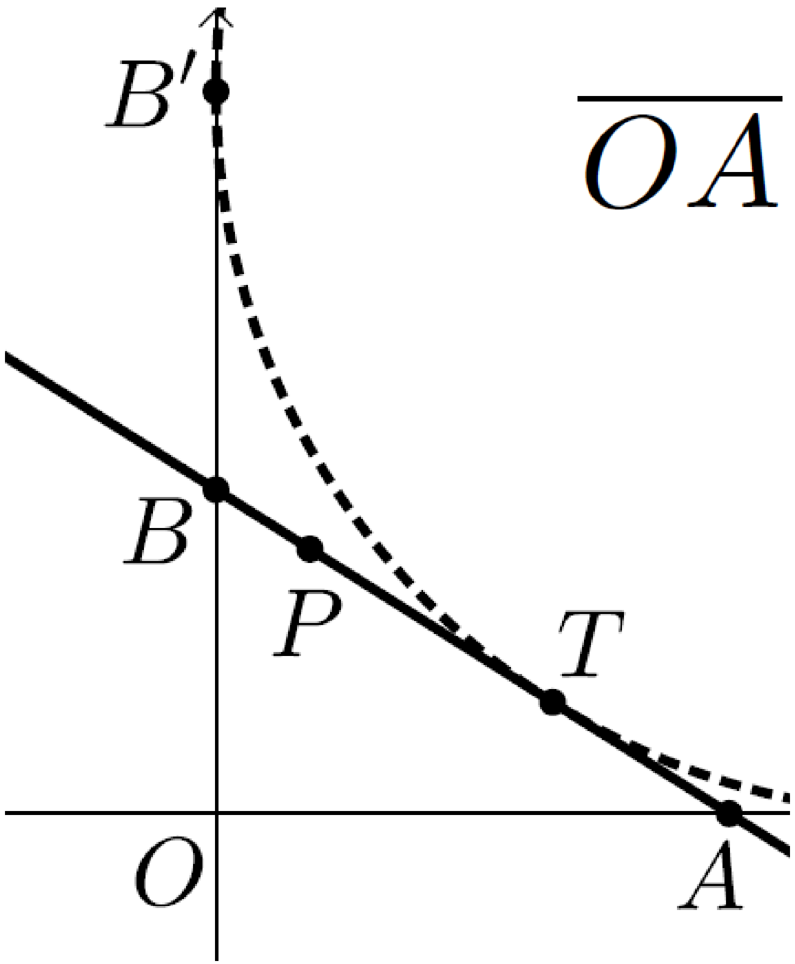
$$\overline{OA'} + \overline{OB'} = p + p = 2p$$

$$\underbrace{\overline{OA} + \overline{AA'}}_{\overline{OA'}} + \underbrace{\overline{OB} + \overline{BB'}}_{\overline{OB'}} = 2\,p$$

$$\overline{AA'} = \overline{AT} \qquad \overline{BB'} = \overline{BT}$$

$$\overline{OA} + \underbrace{\overline{AA'}}_{\overline{AT}} + \overline{OB} + \underbrace{\overline{BB'}}_{\overline{BT}} = 2p$$

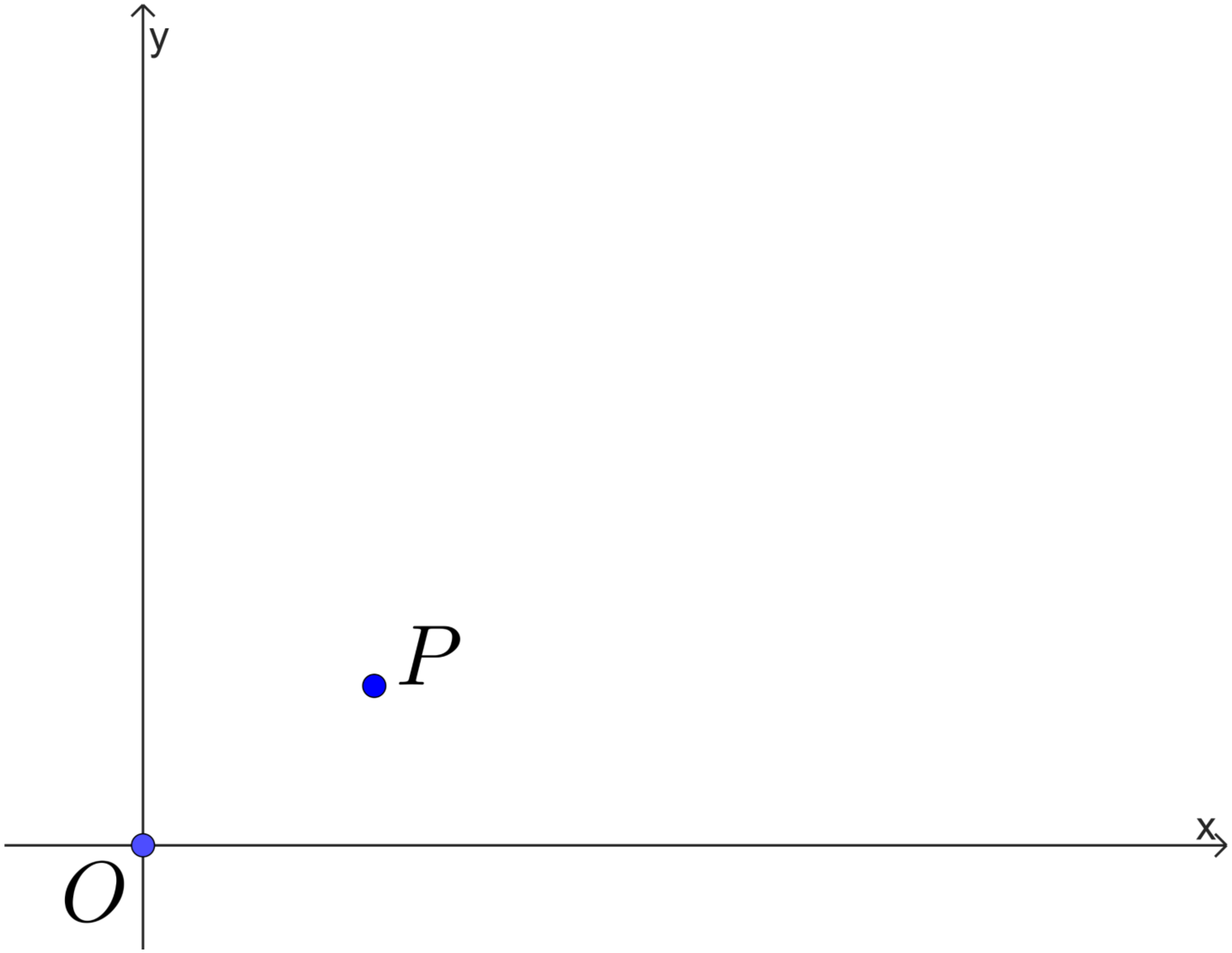
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



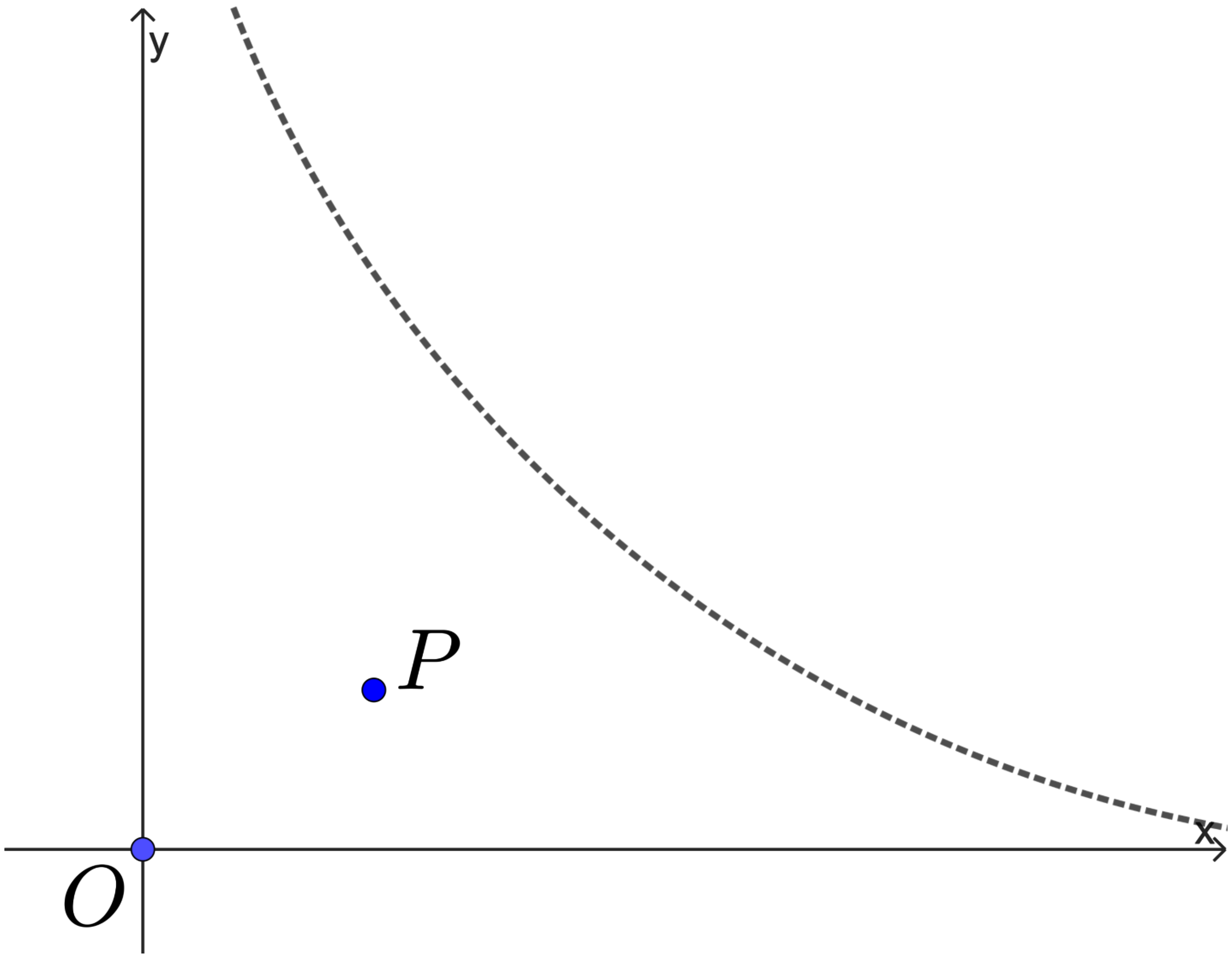
$$\overline{OA} + \underbrace{\overline{AT} + \overline{BT}}_{\overline{AB}} + \overline{OB} = 2\,p$$

$$\underbrace{\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB}}_{\text{perimetro }(OAB)} = 2p$$

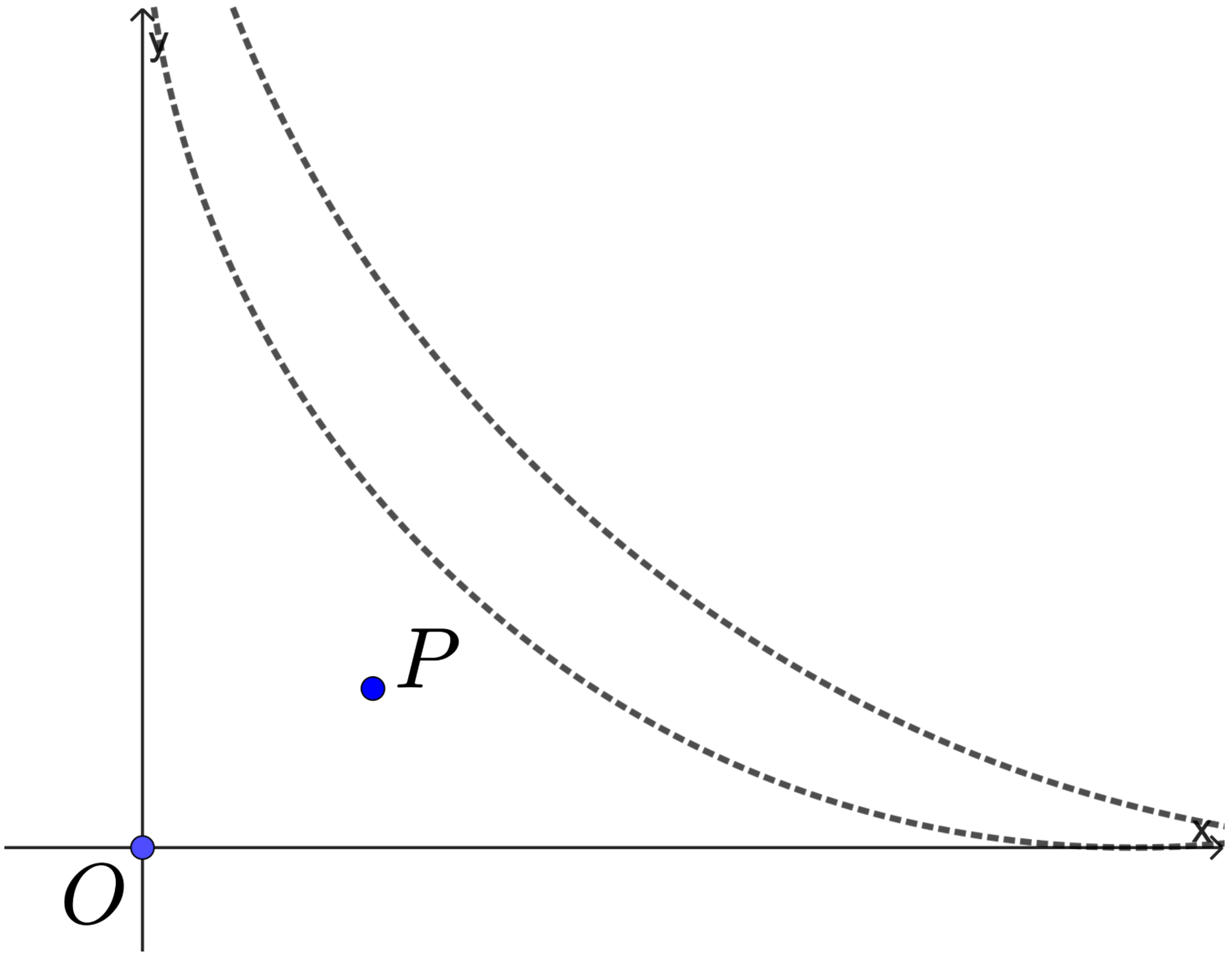
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



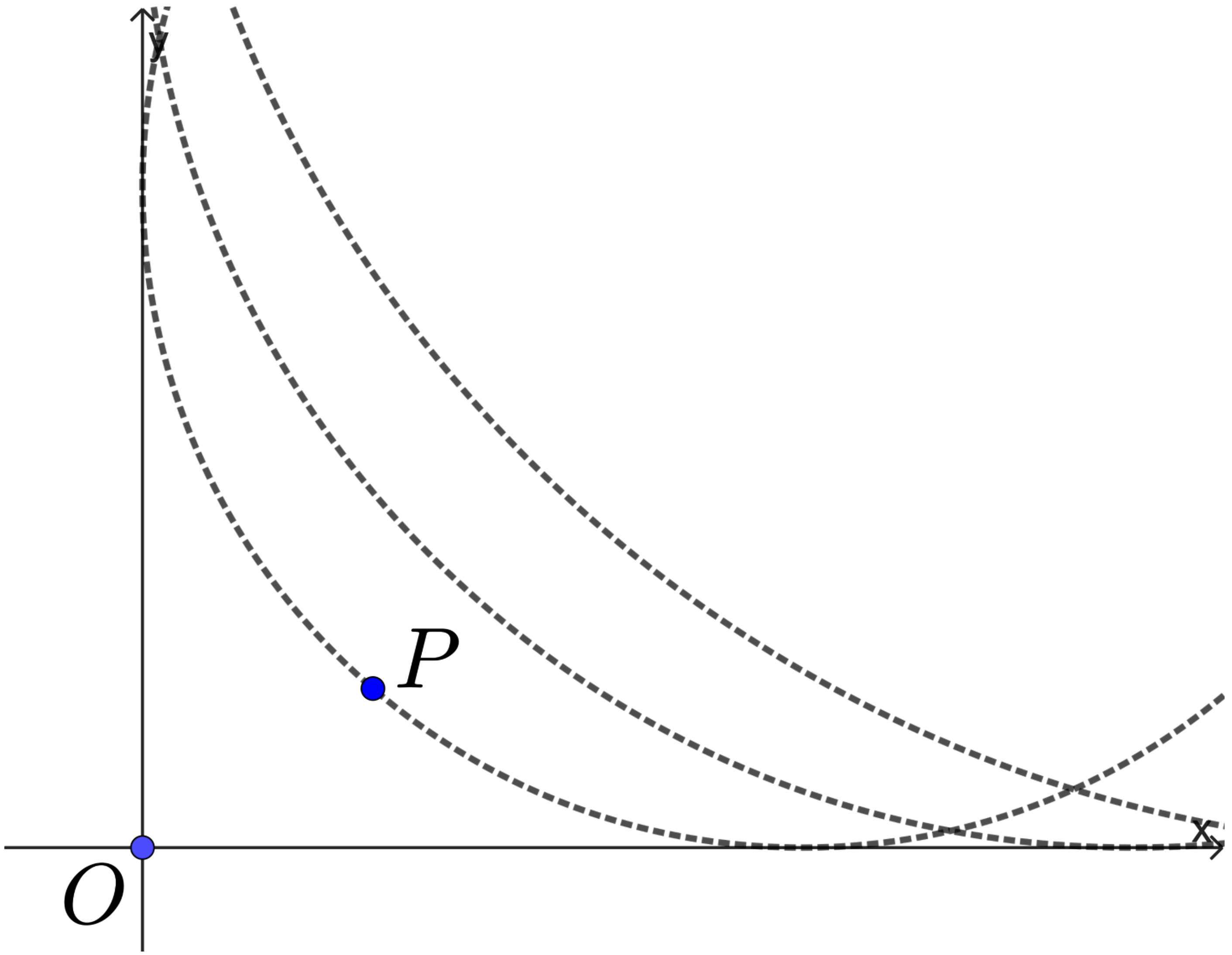
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



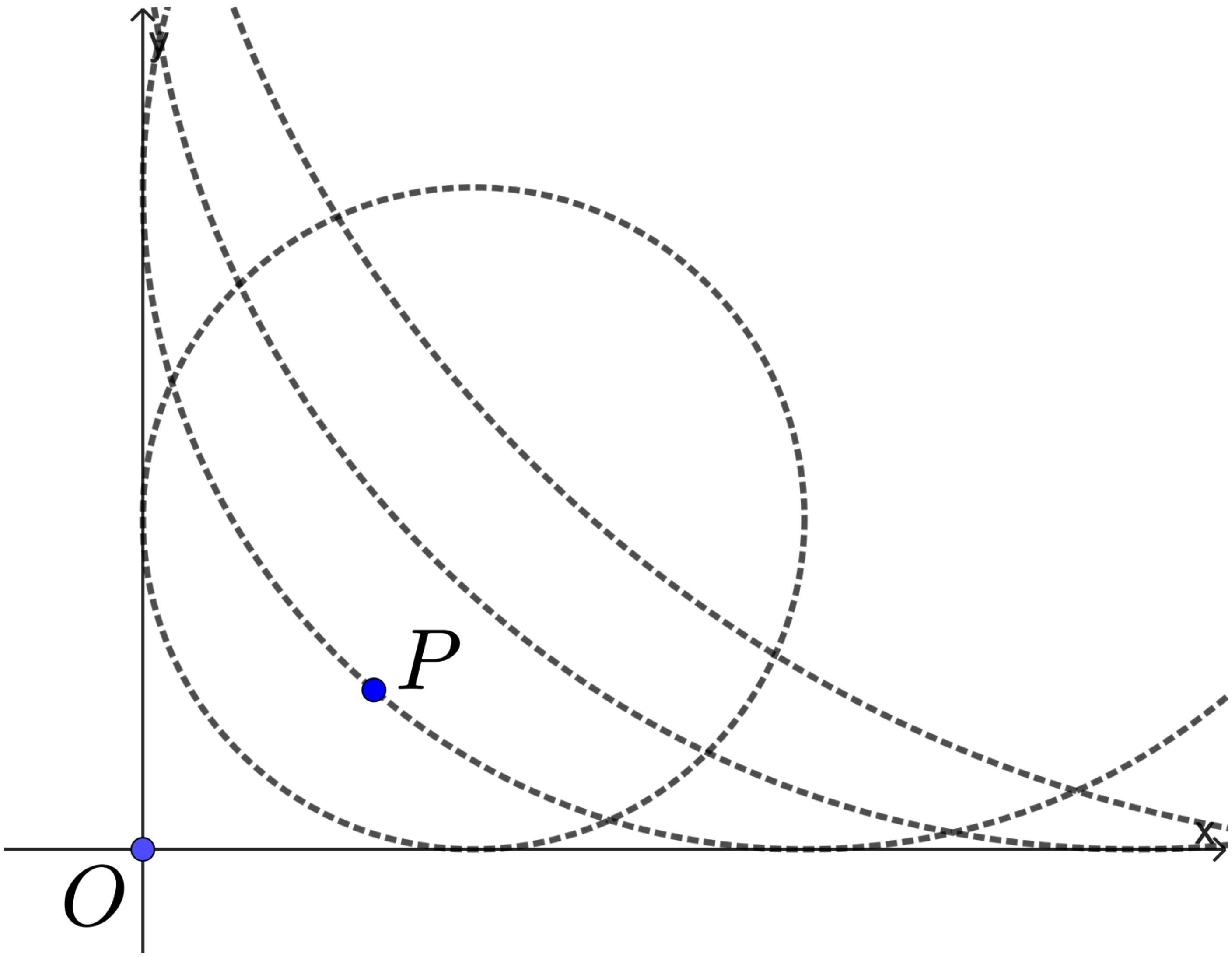
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



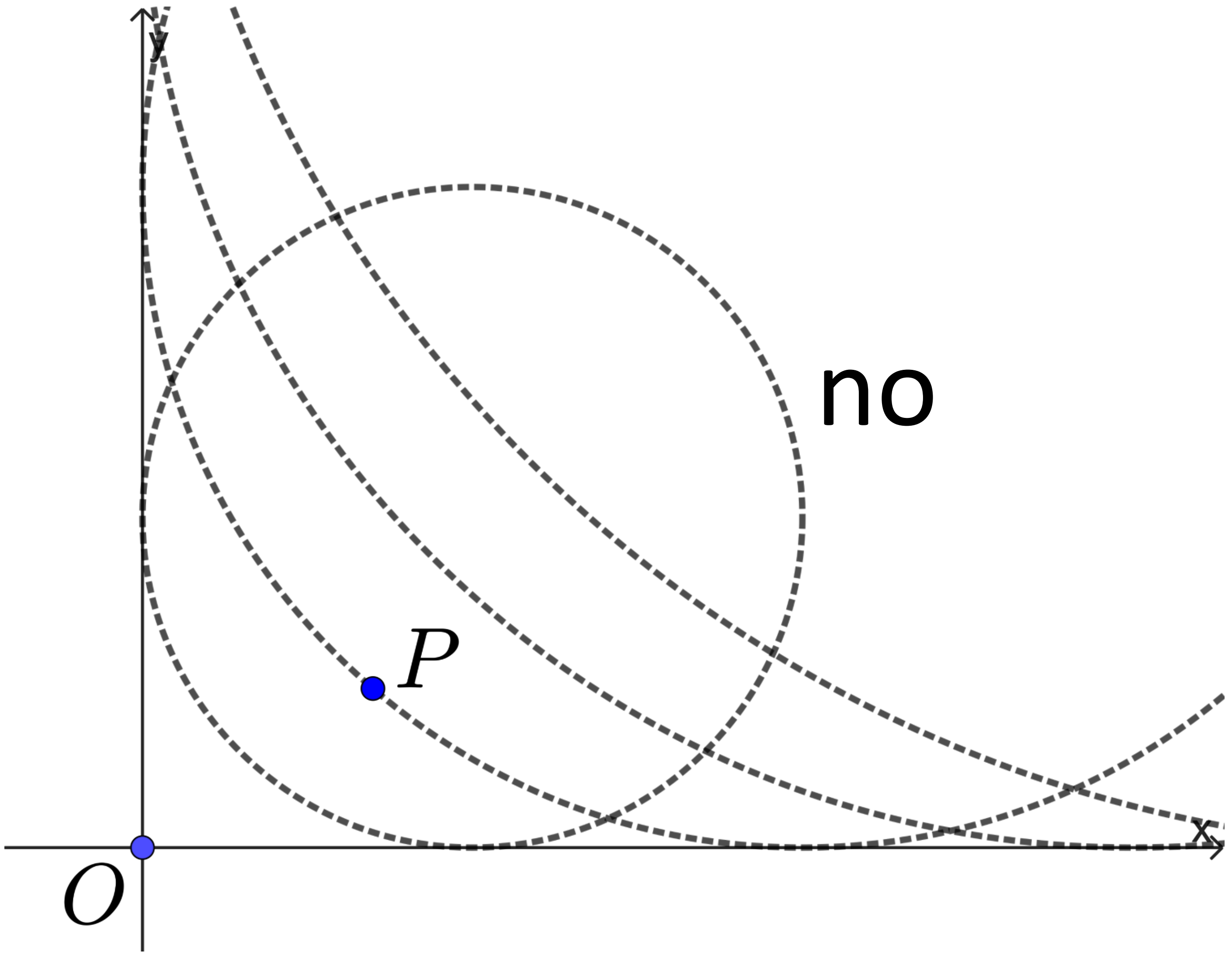
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



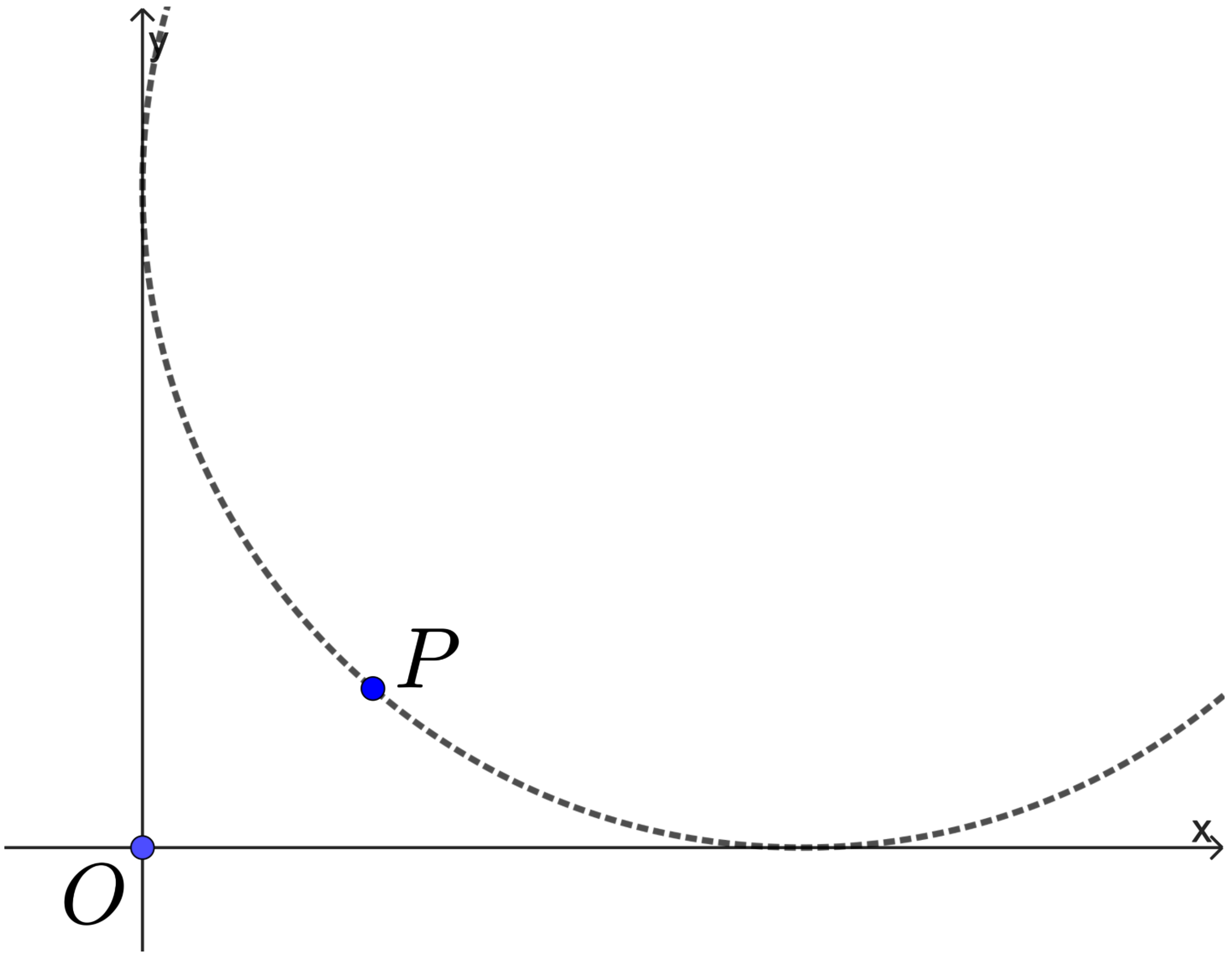
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



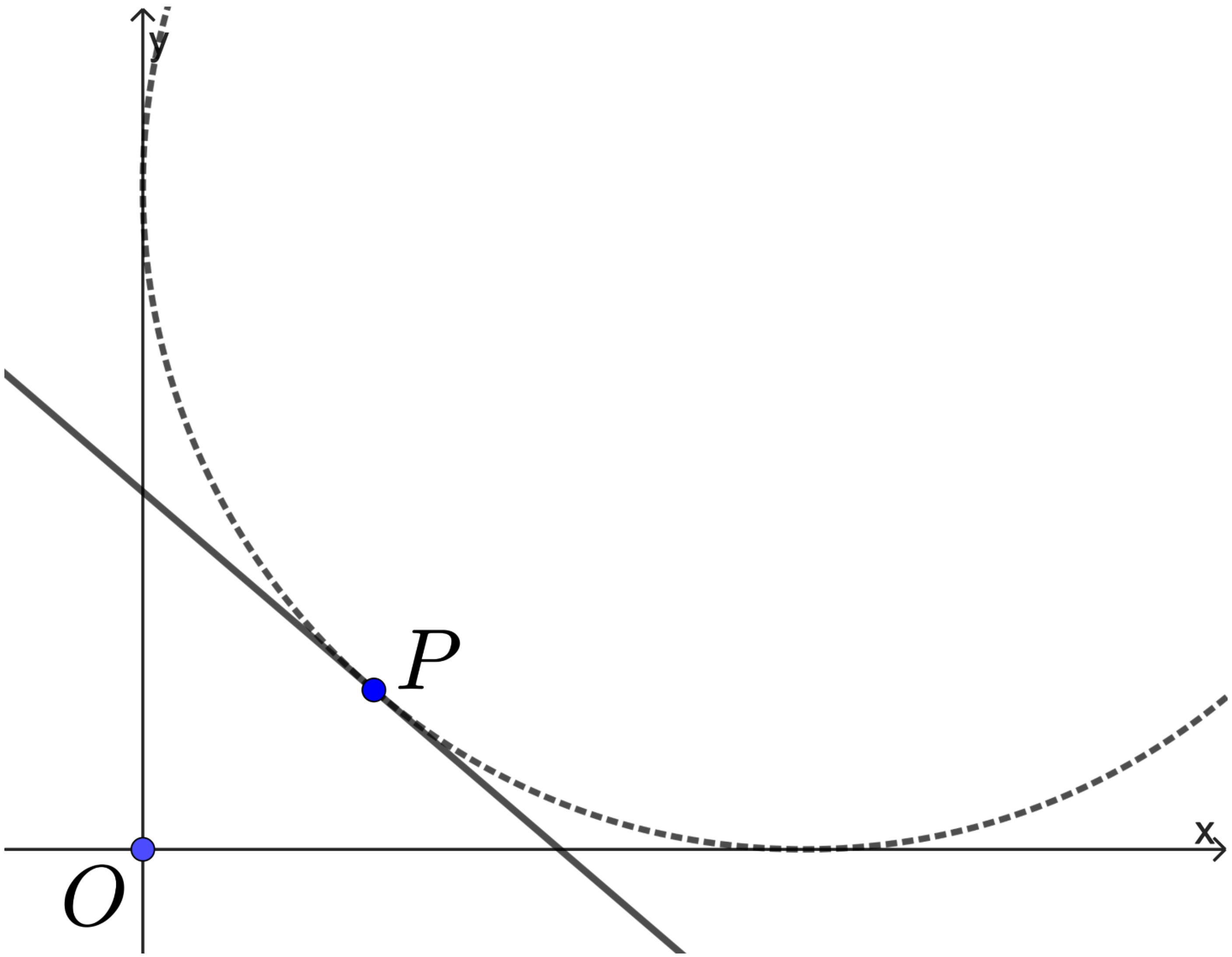
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



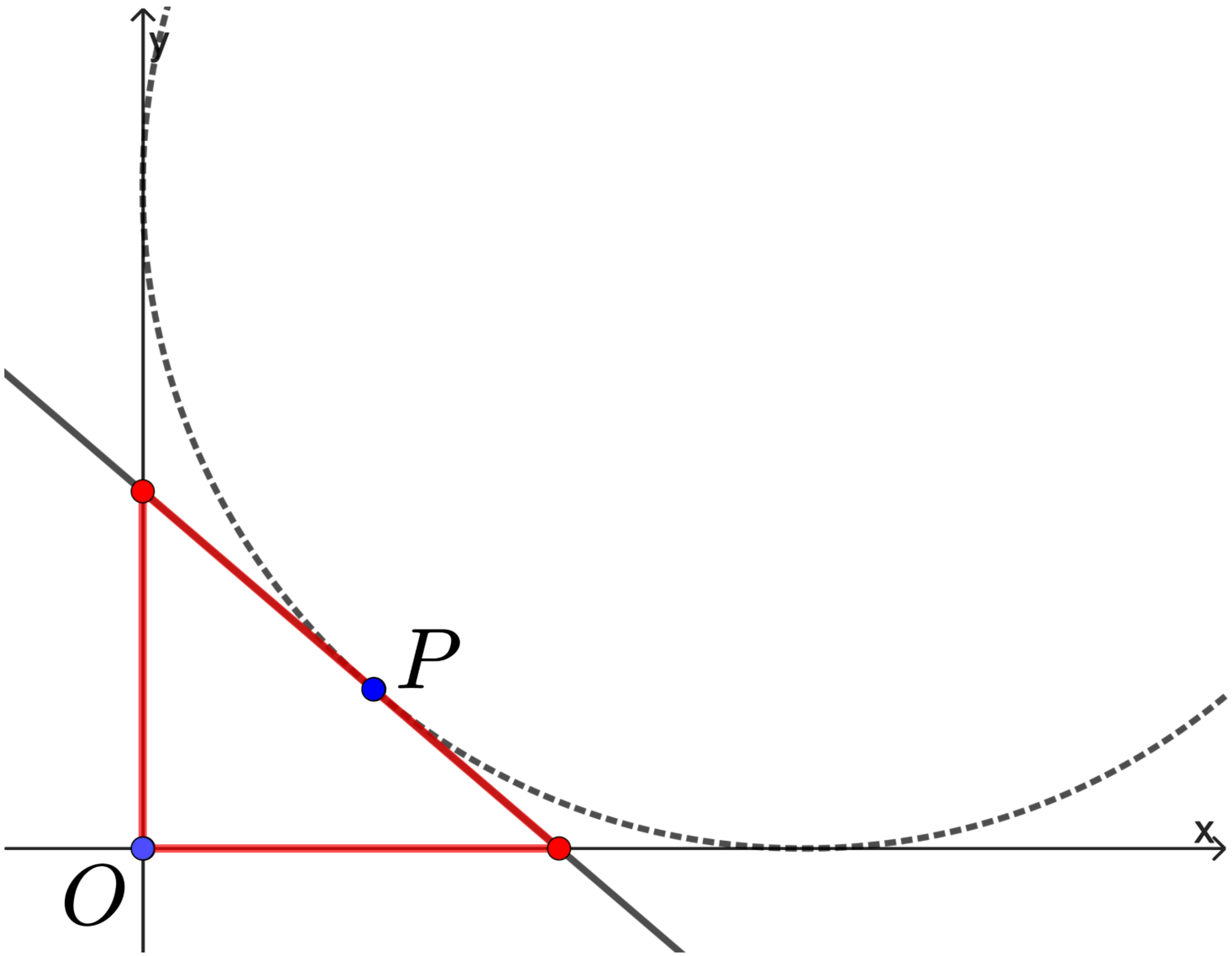
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



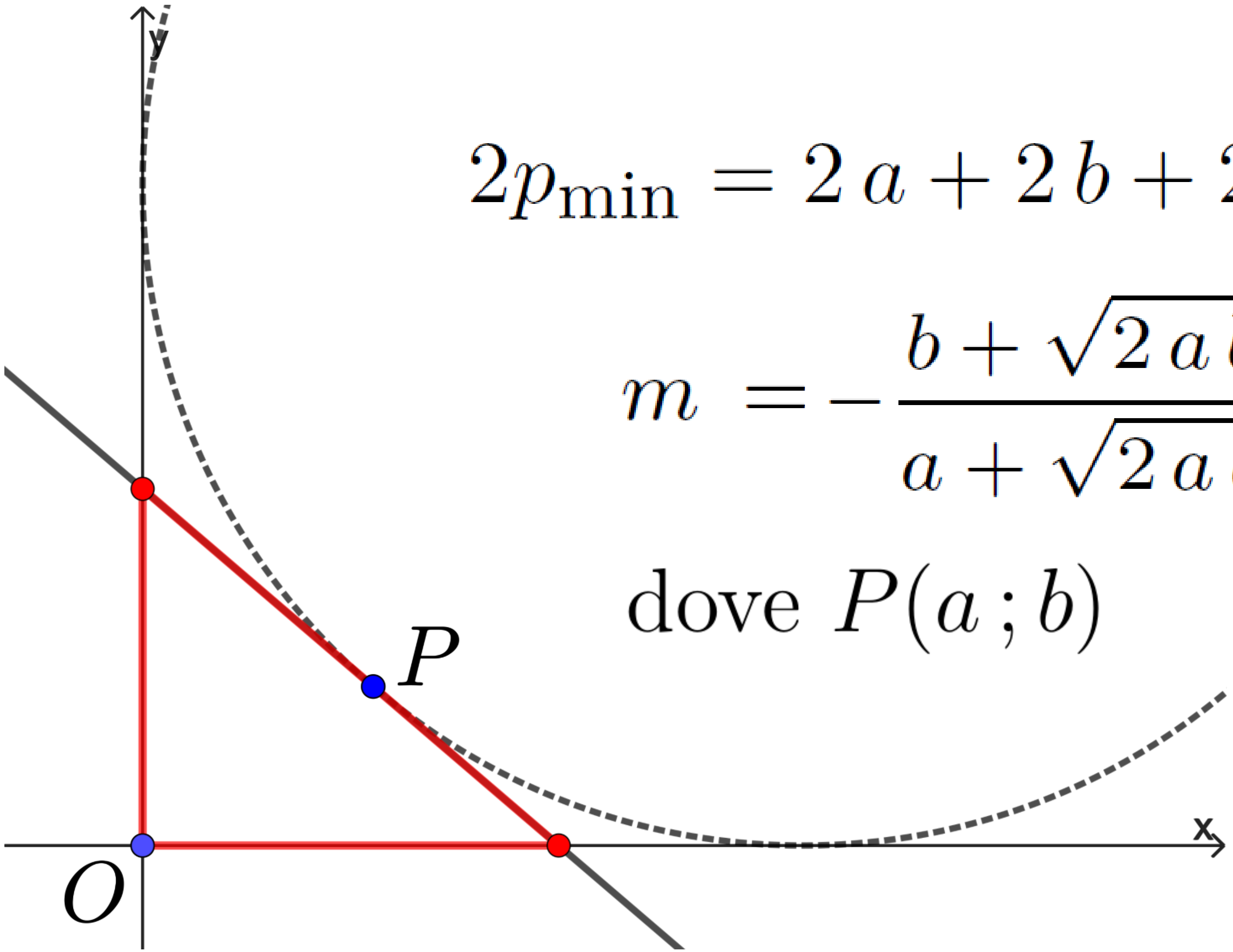
Triangolo rettangolo di minimo perimetro



Triangolo rettangolo di minimo perimetro



Triangolo rettangolo di minimo perimetro



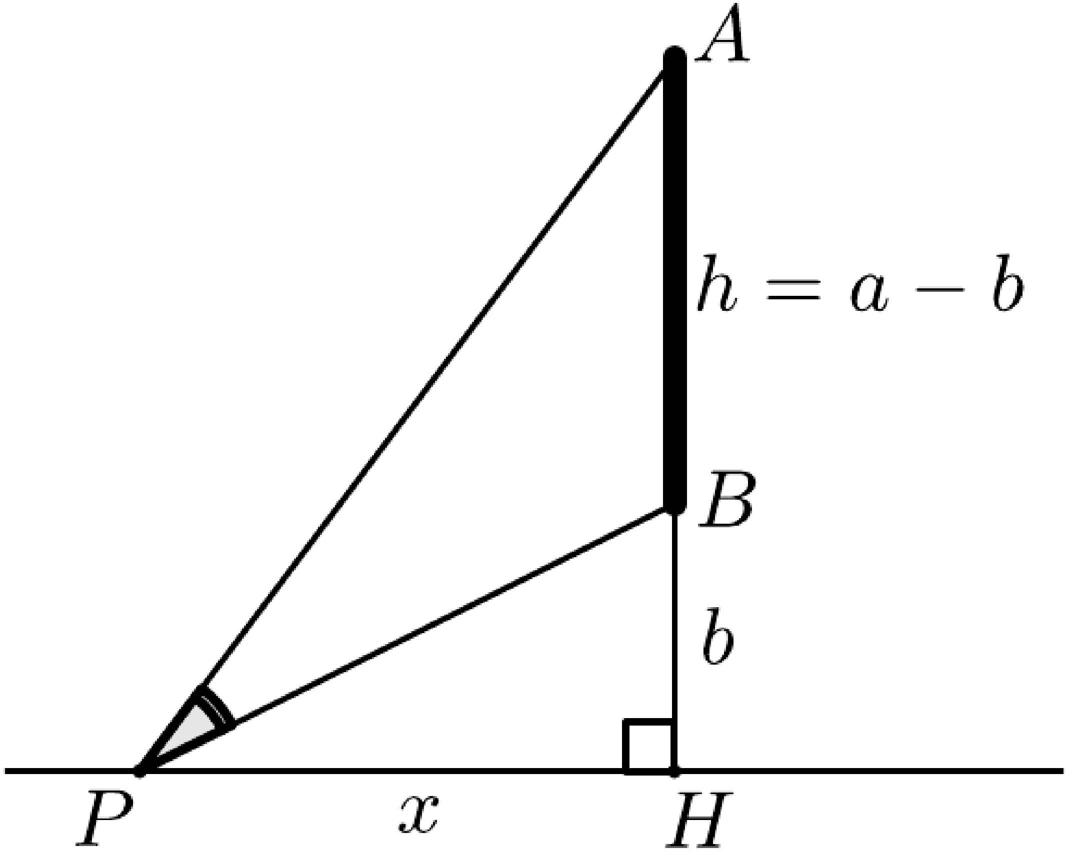
$$2p_{\min} = 2\,a + 2\,b + 2\sqrt{2\,a\,b}$$

$$m = -\frac{b + \sqrt{2\,a\,b}}{a + \sqrt{2\,a\,b}}$$

dove $P(a\,;b)$

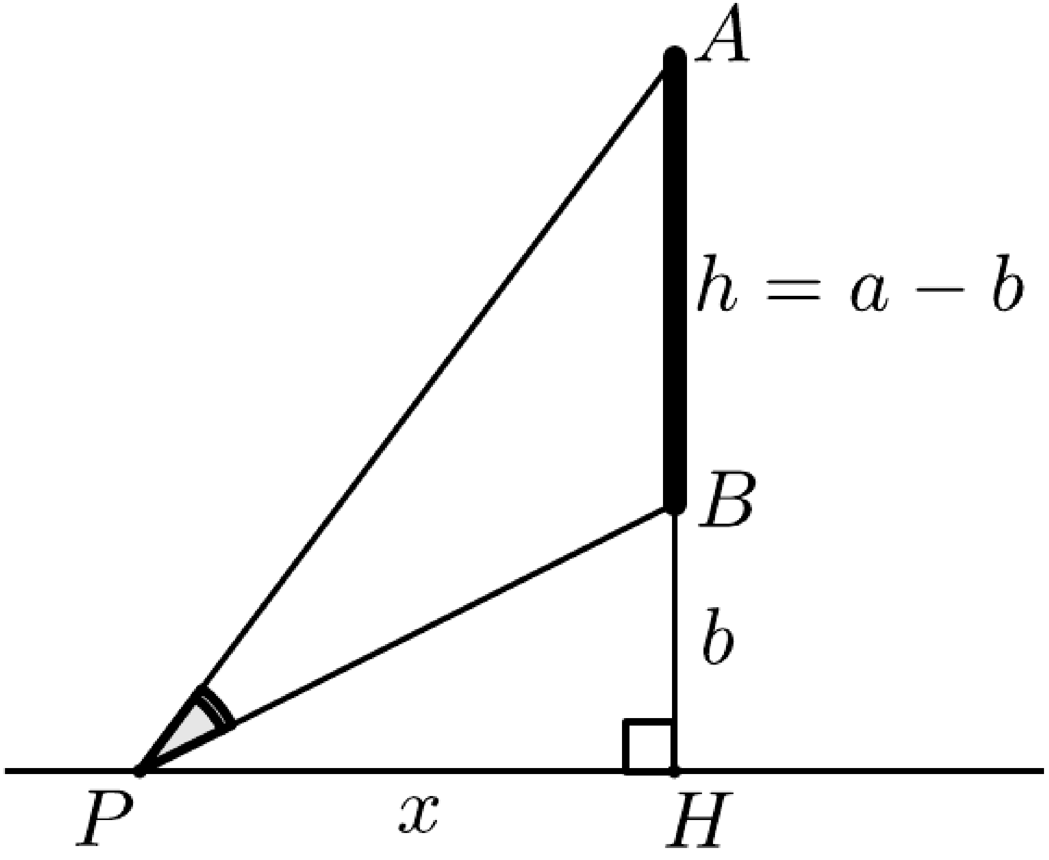
Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



$$\overline{AH} = a, \ \overline{BH} = b$$

$$\alpha = A\widehat{P}H, \ \beta = B\widehat{P}H$$

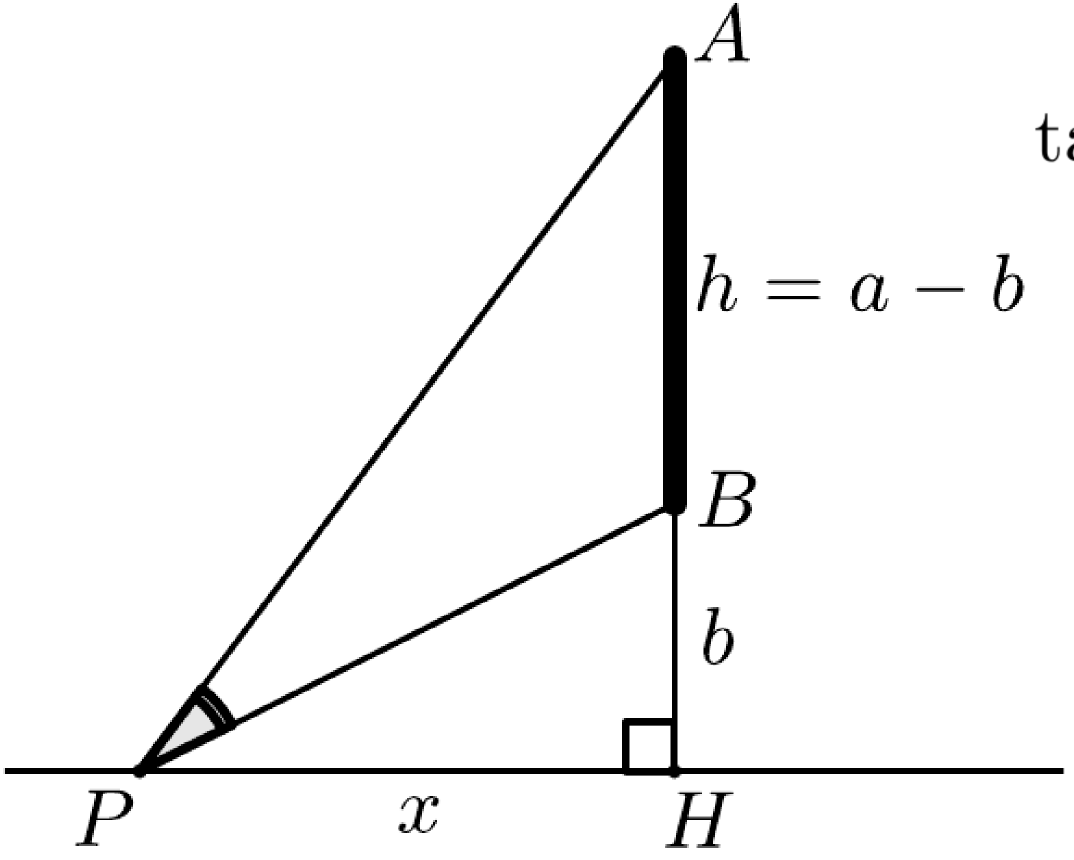
$$\tan\alpha = \frac{a}{x} \quad \tan\beta = \frac{b}{x}$$

$$A\widehat{P}B = \alpha - \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?

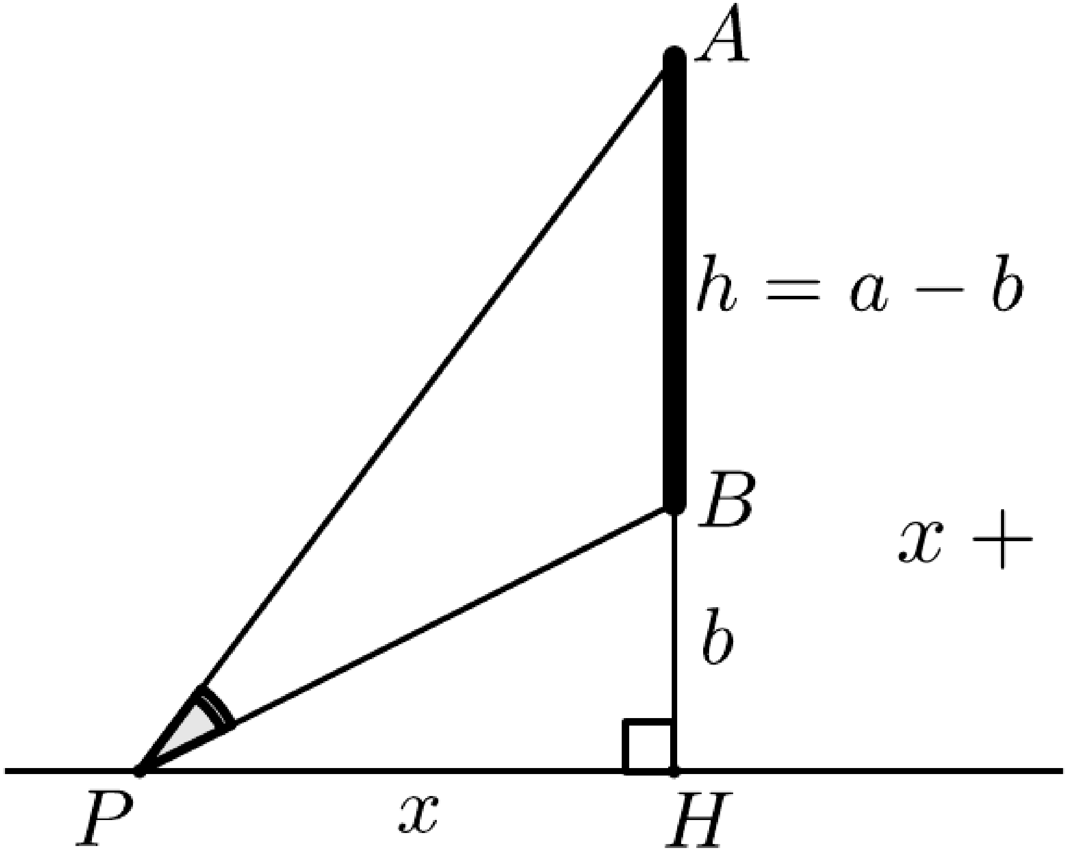


$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x}}{1 + \dfrac{a}{x} \cdot \dfrac{b}{x}} = \frac{(a-b)x}{x^2 + a\,b}$$

$$= \frac{a - b}{x + \dfrac{a\,b}{x}}$$

Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



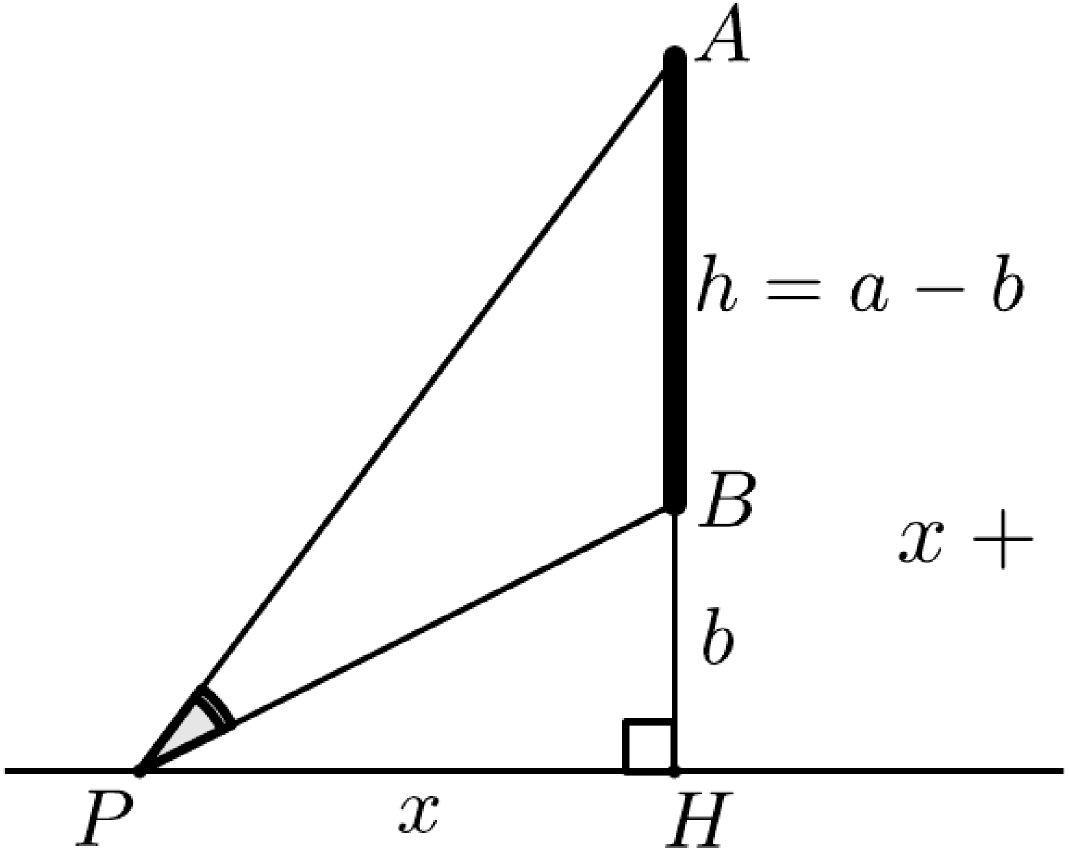
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{x + \dfrac{a\,b}{x}}$$

$$x + \frac{a\,b}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a\,b}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{a\,b}$$

$$\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a\,b}}{\sqrt{x}} = 0$$

Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{x + \frac{a\,b}{x}}$$

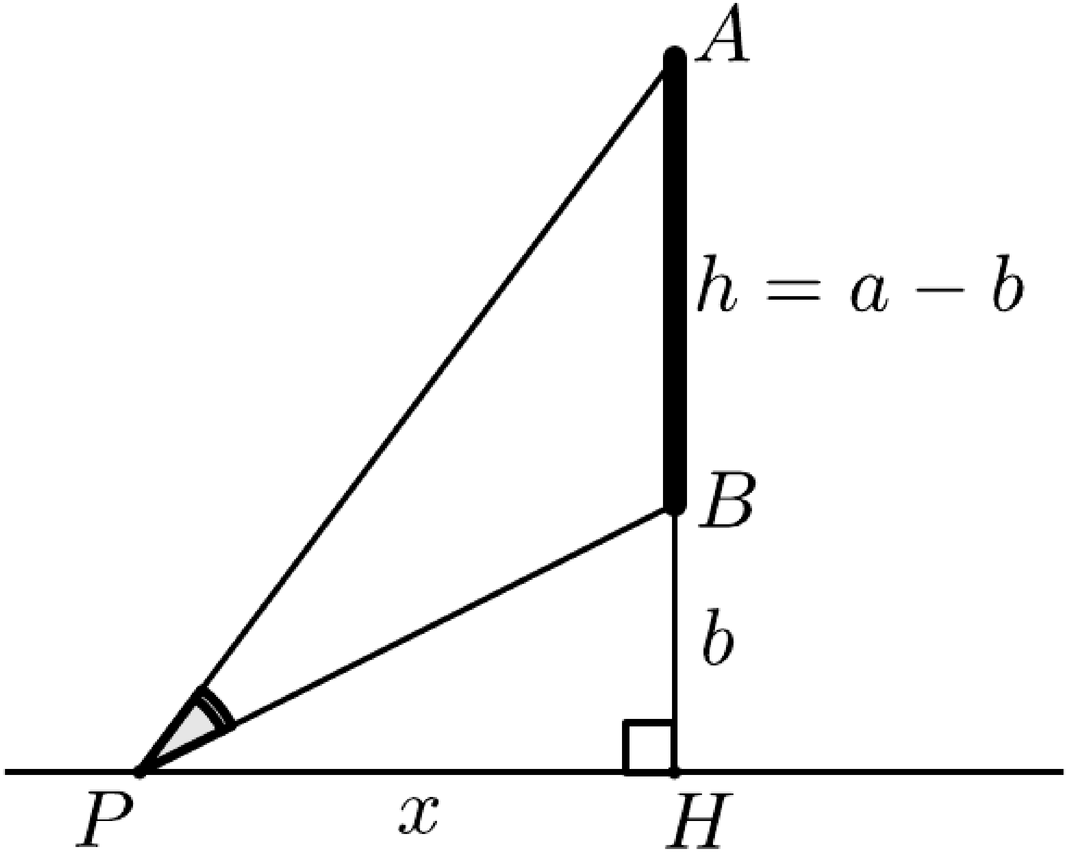
$$x + \frac{a\,b}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a\,b}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{a\,b}$$

$$\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a\,b}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$x = \sqrt{a\,b}$$

Problema di Regiomontano

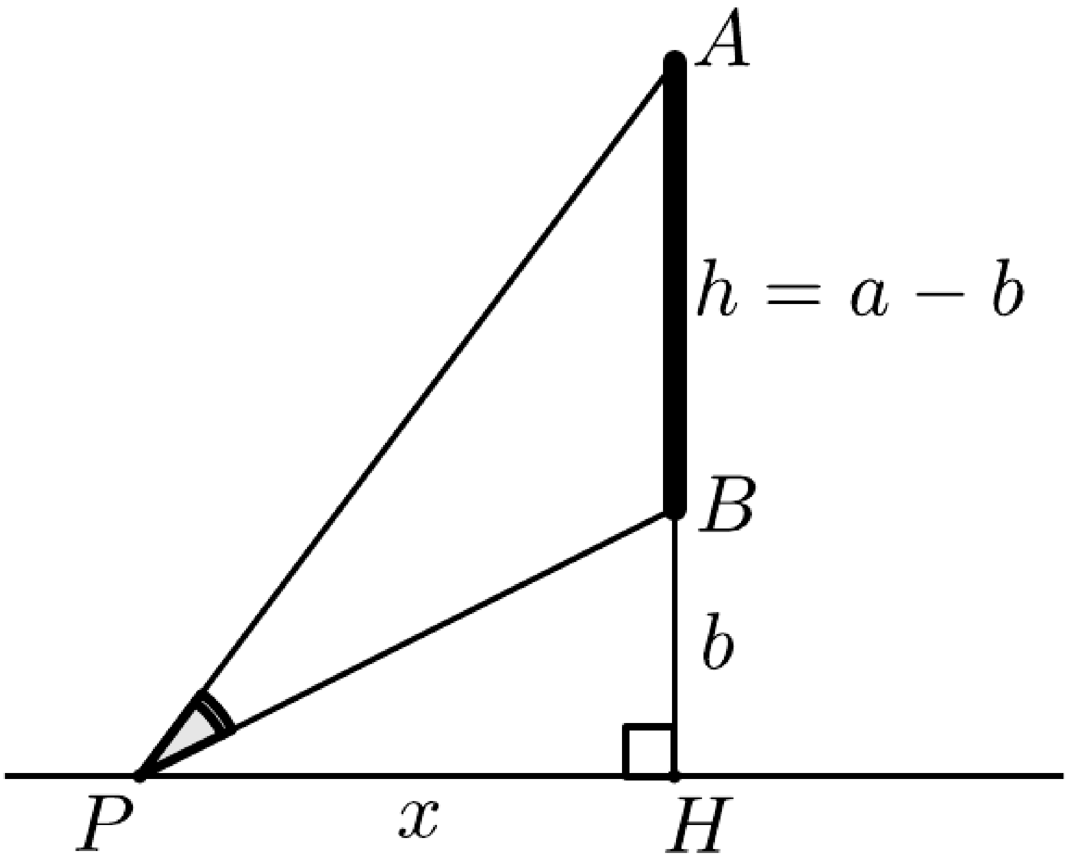
Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



$$\theta_{\max} = \arctan \frac{a-b}{2\sqrt{a\,b}}$$

Problema di Regiomontano

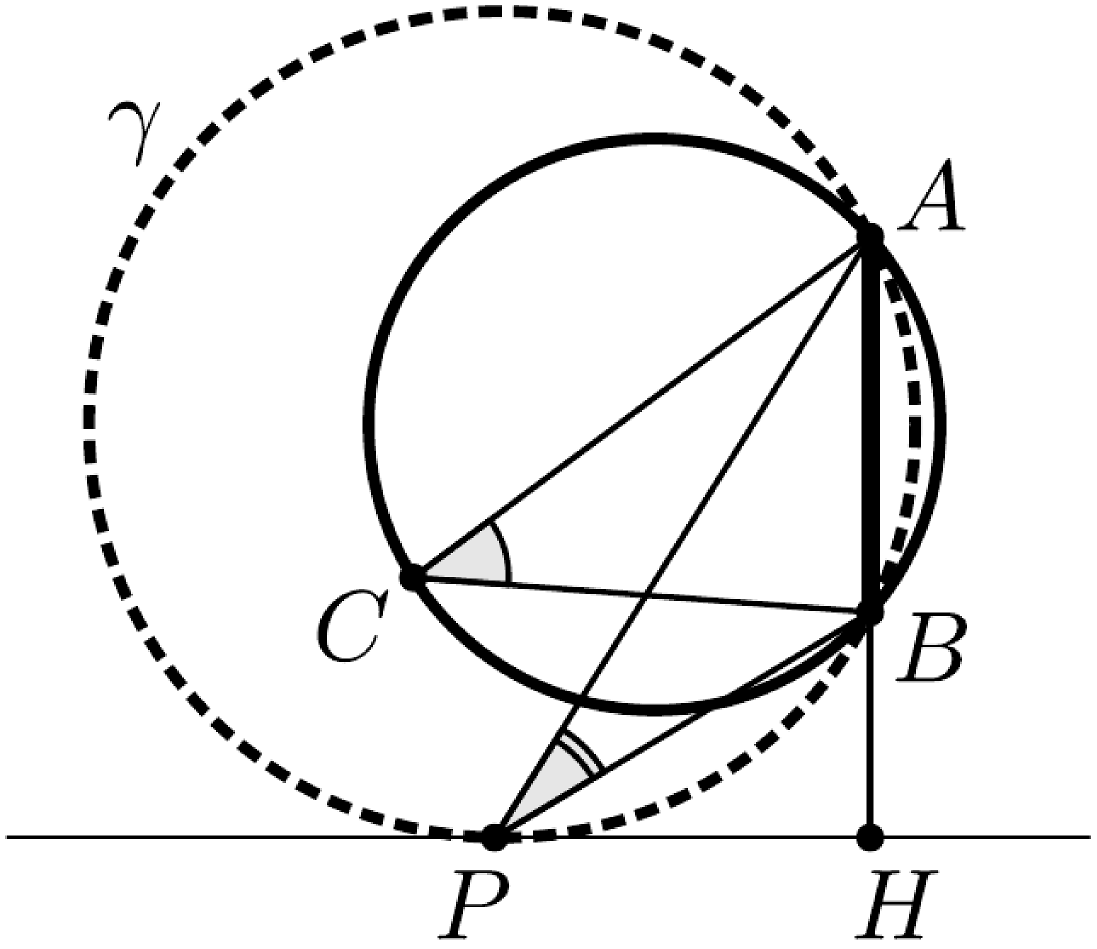
Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



Un metodo geometrico…

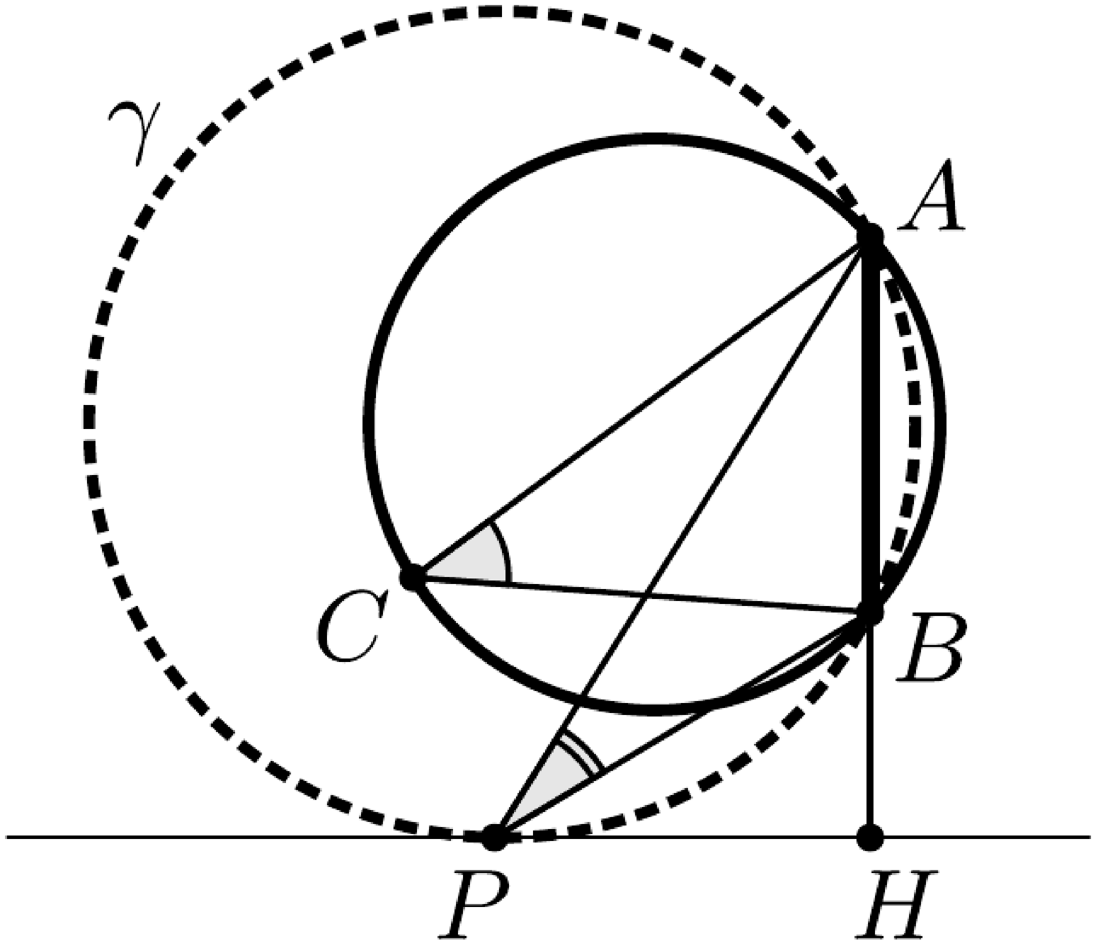
Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



Problema di Regiomontano

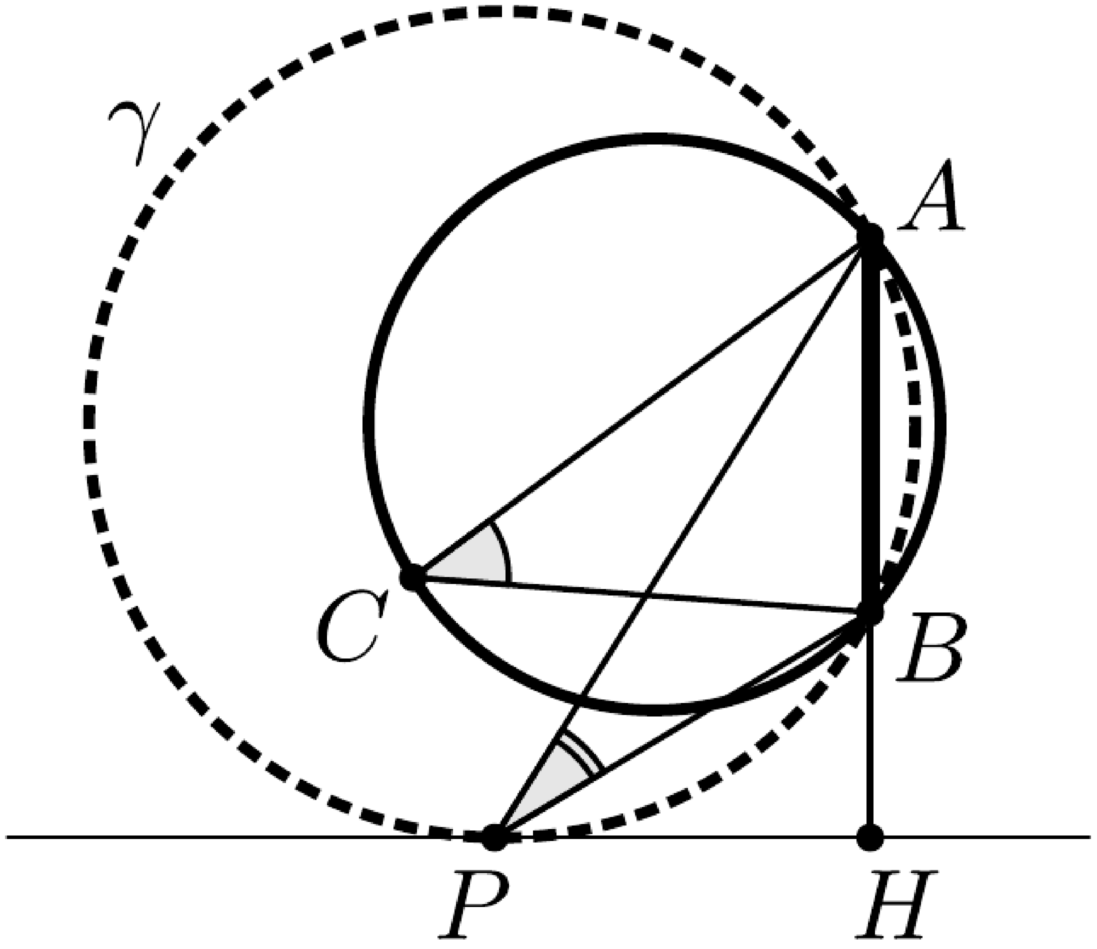
Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



Teorema della corda…

Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



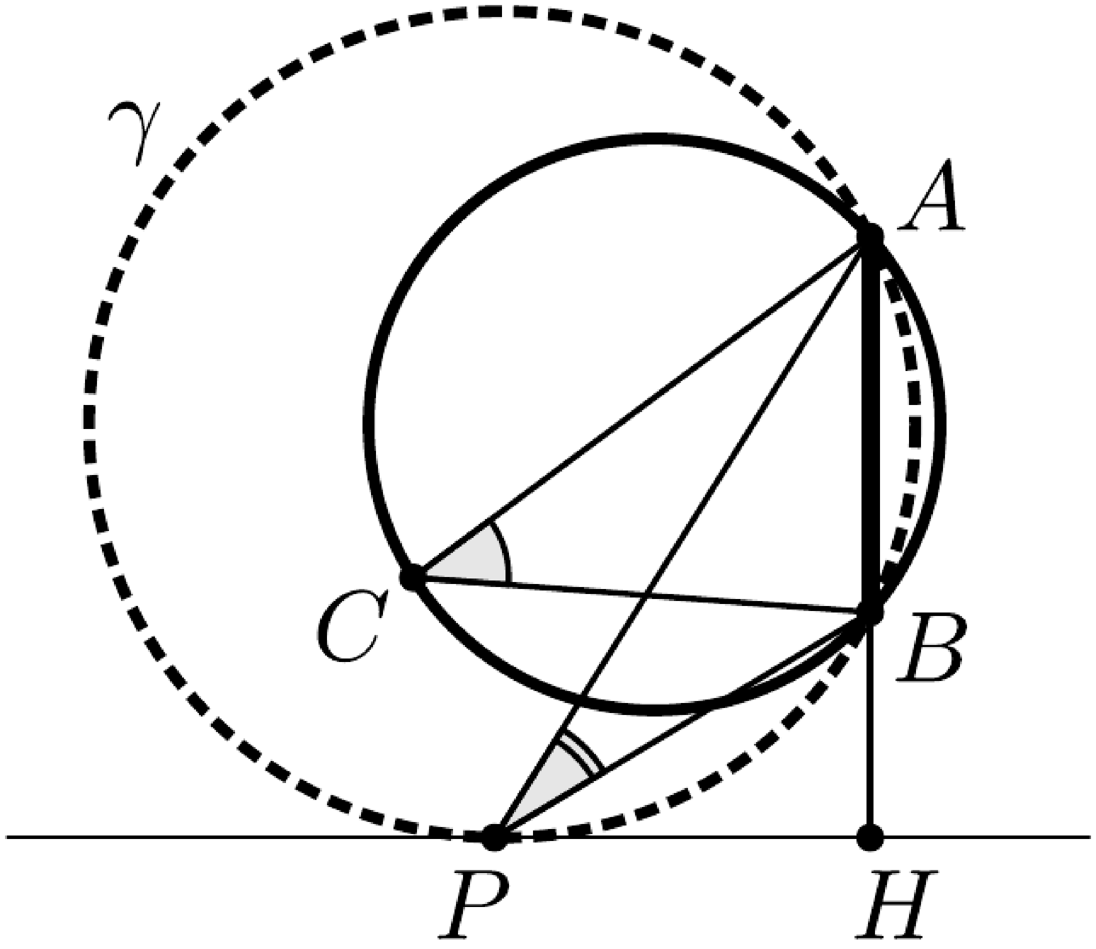
$$\sin(A\widehat{C}B) = \frac{\overline{AB}}{2\,r}$$

$$>$$

$$\frac{\overline{AB}}{2\,r_\gamma} = \sin(A\widehat{P}B)$$

Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



$$\sin(A\widehat{C}B) = \frac{\overline{AB}}{2\,r}$$

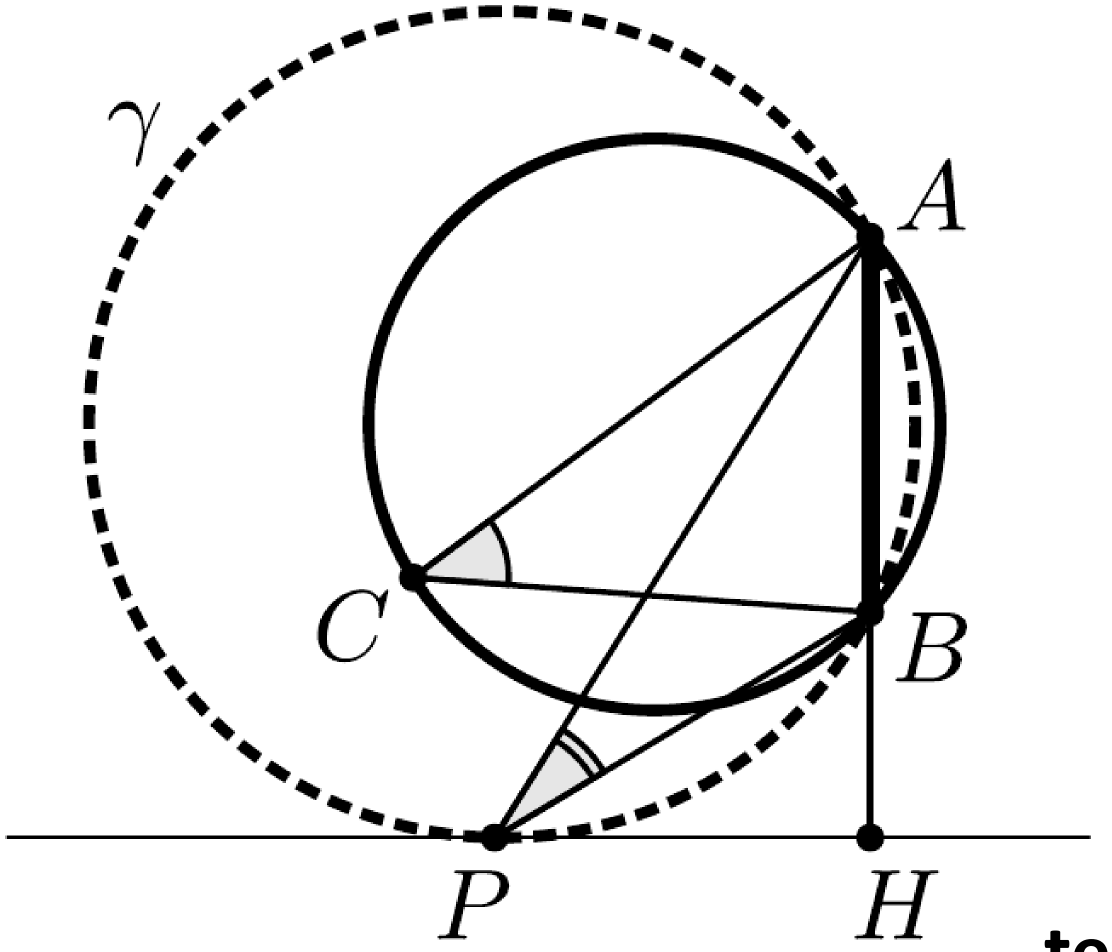
$$>$$

$$\frac{\overline{AB}}{2\,r_\gamma} = \sin(A\widehat{P}B)$$

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{HA}\cdot\overline{HB}} = \sqrt{a\,b}$$

Problema di Regiomontano

Dove conviene posizionarsi per vedere sotto l'angolo massimo il segmento AB?



$$\sin(A\widehat{C}B) = \frac{\overline{AB}}{2\,r}$$

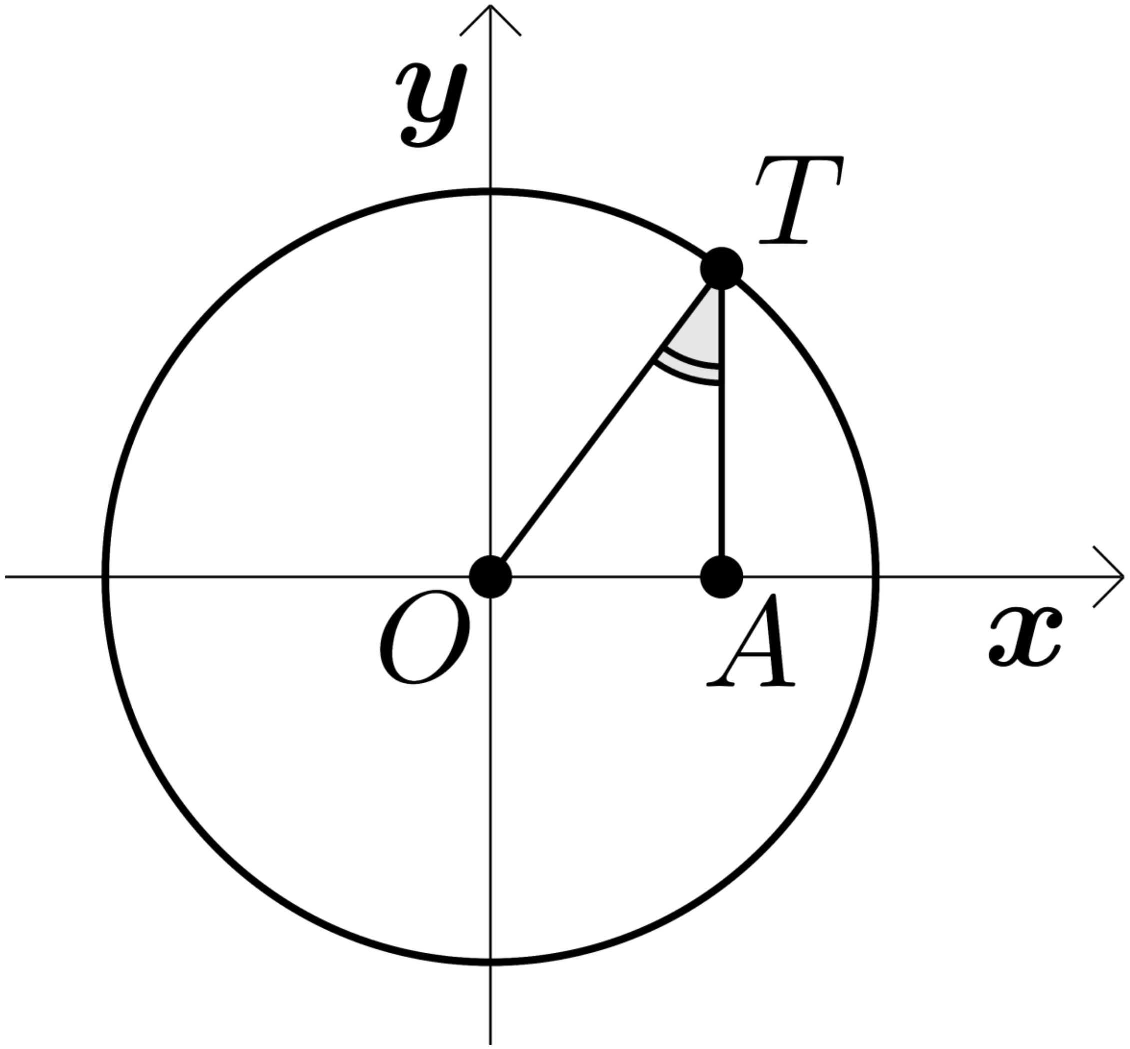
$$>$$

$$\frac{\overline{AB}}{2\,r_\gamma} = \sin(A\widehat{P}B)$$

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{HA}\cdot\overline{HB}} = \sqrt{a\,b}$$

teorema della tangente e della secante

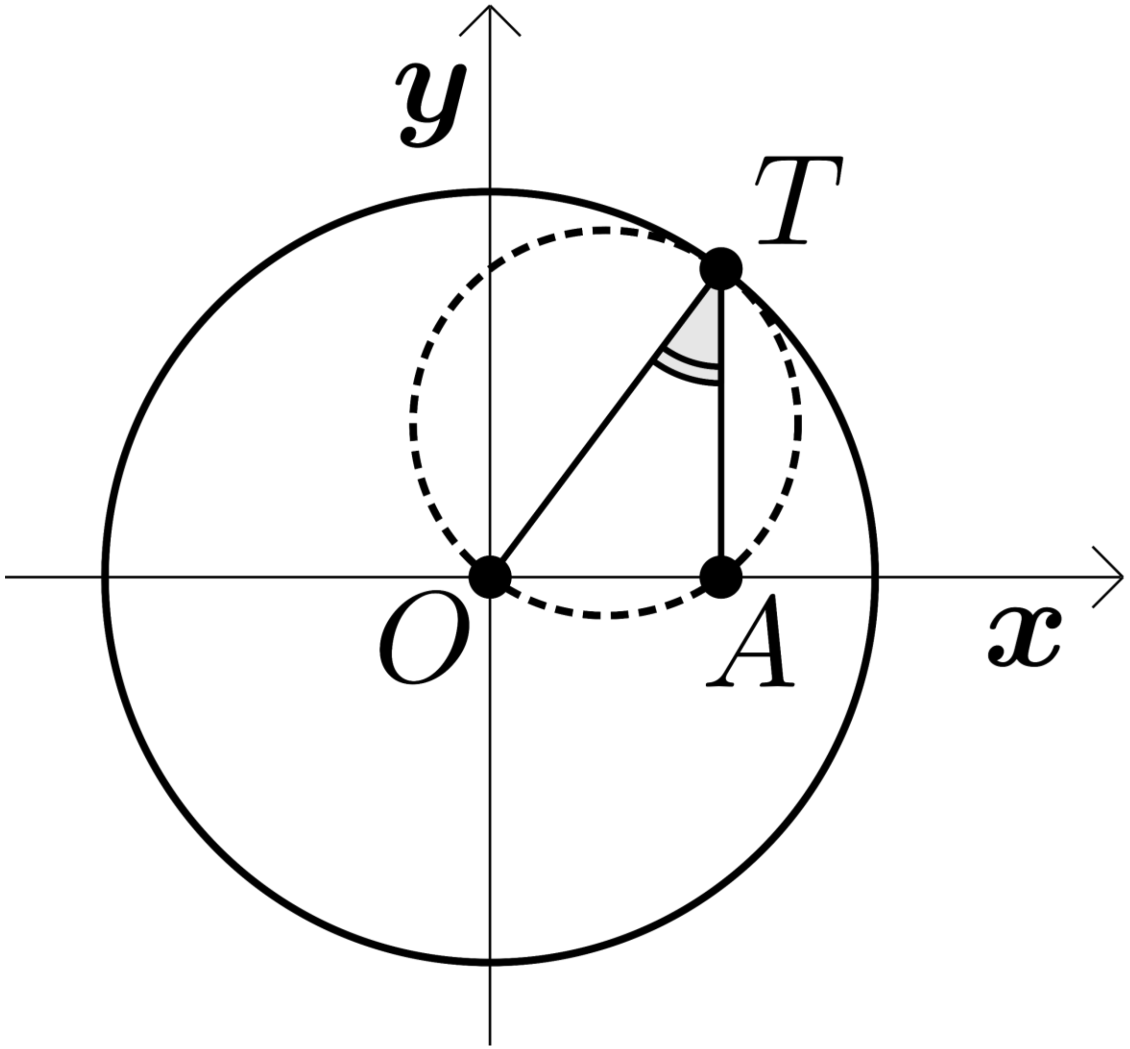
Problema di Regiomontano: varianti



$$\gamma : x^2 + y^2 = 1$$

$$A\,(t\,;0),\ \text{con}\ 0 < |t| < 1$$

Problema di Regiomontano: varianti

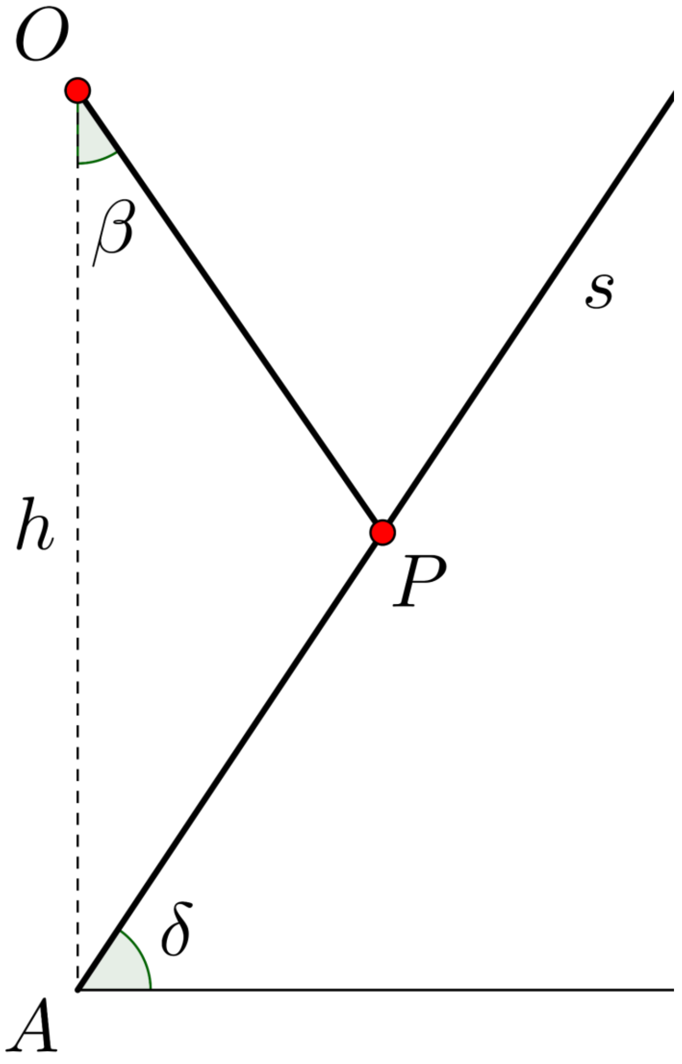


$$\gamma : x^2 + y^2 = 1$$

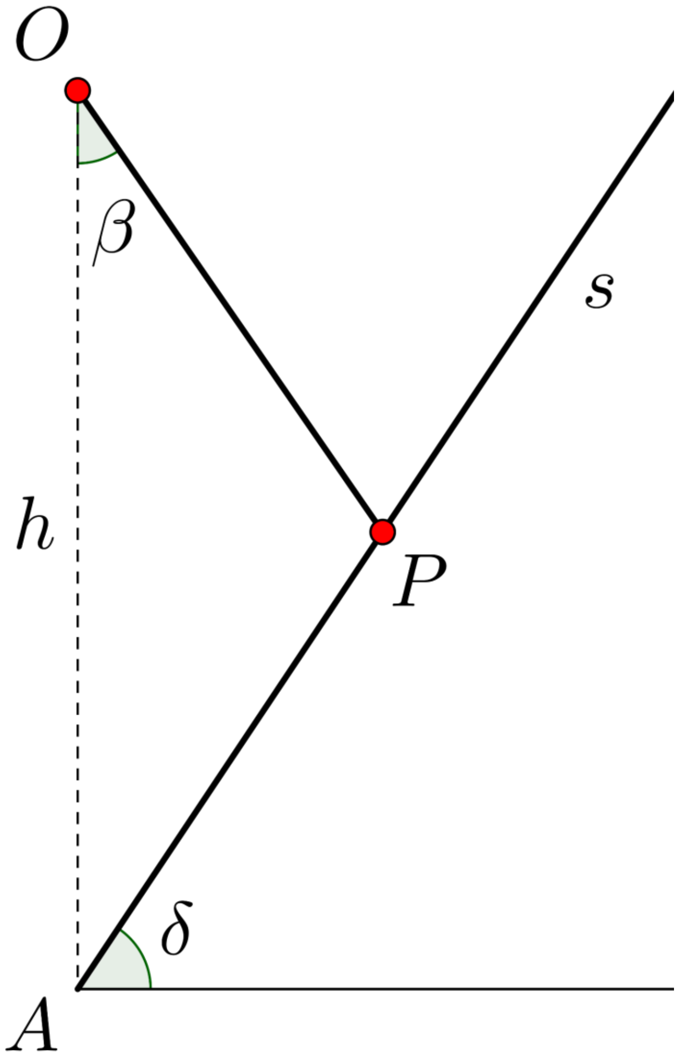
$$A\,(t\,;0),\ \text{con}\ 0 < |t| < 1$$

$$O\widehat{T}A_{\,\max} = \arcsin t$$

Problema della discesa più rapida

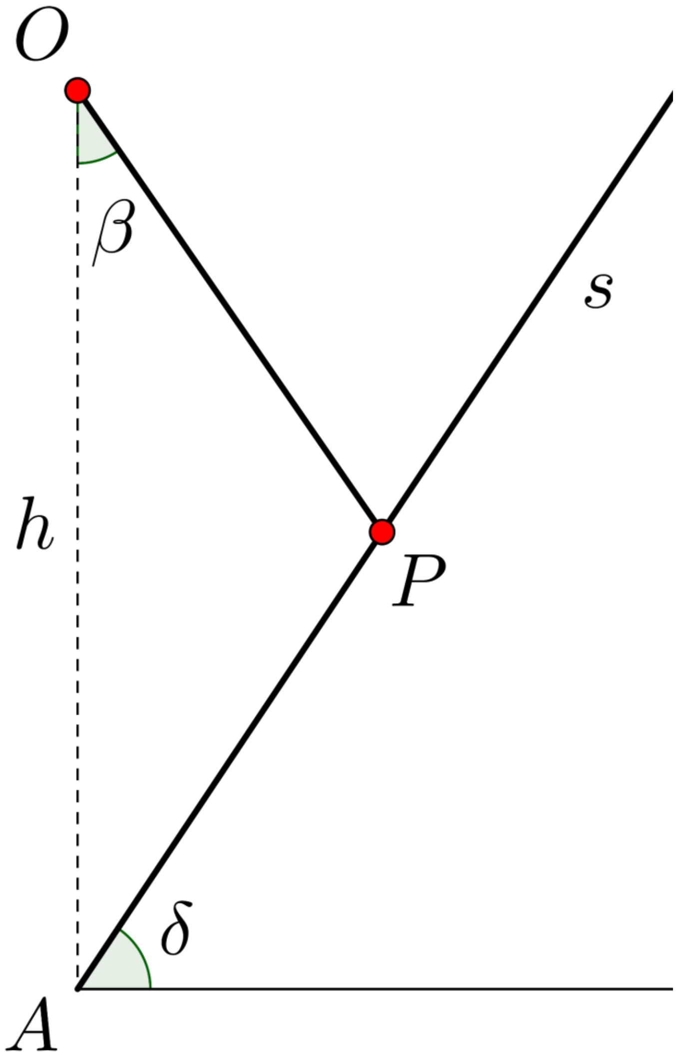


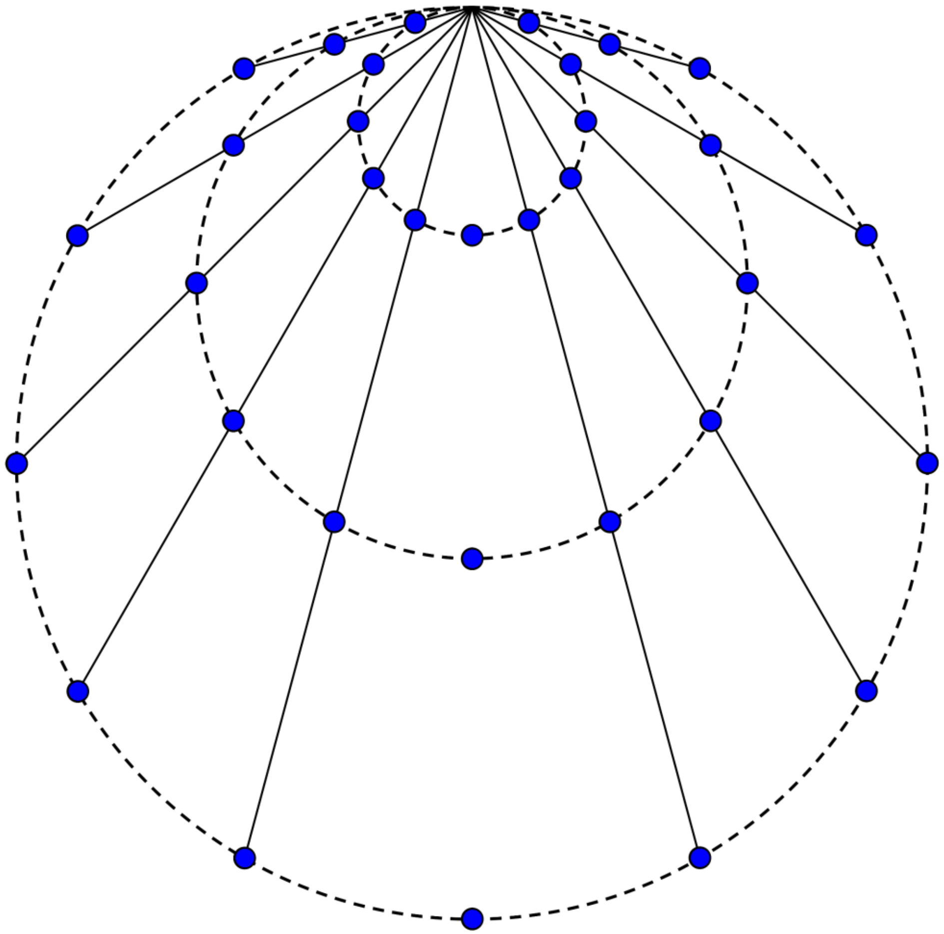
Problema della discesa più rapida



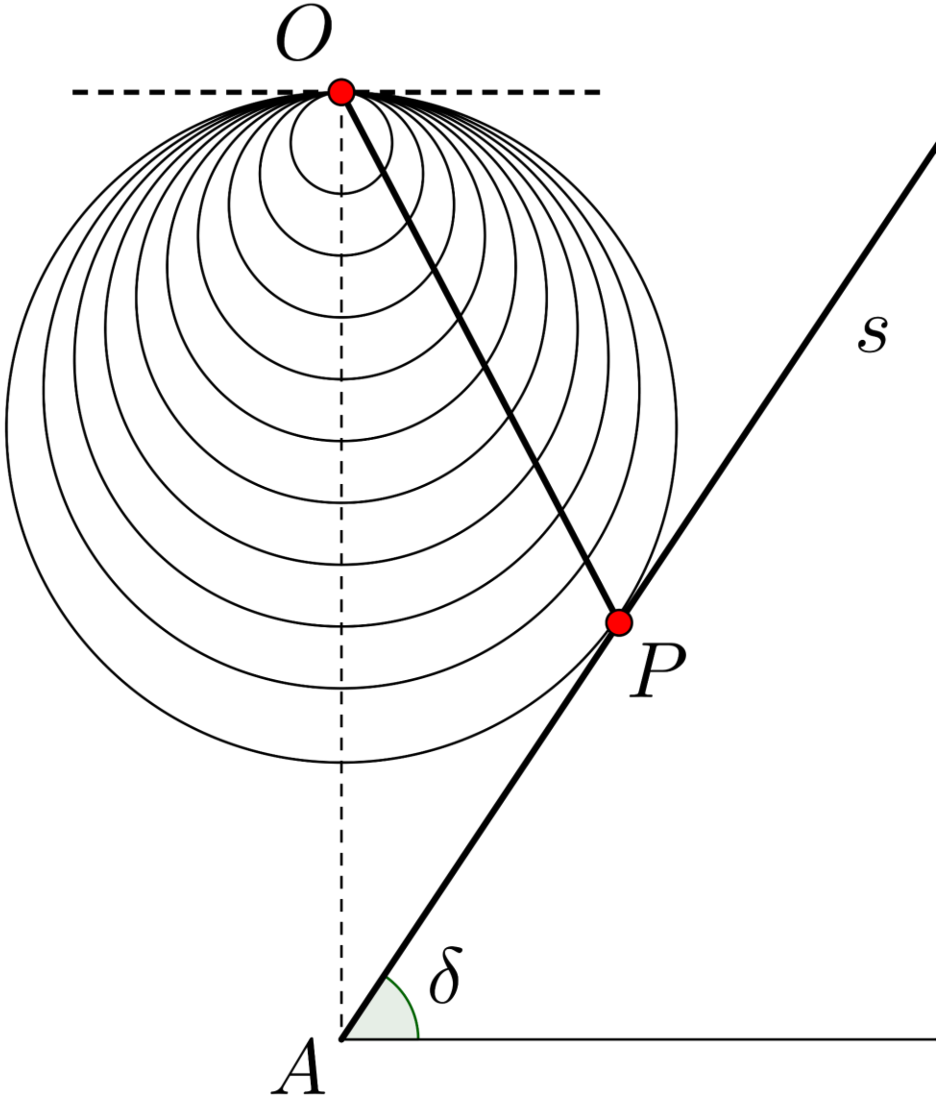
Come dobbiamo scegliere il punto P se vogliamo che il **<u>tempo</u>** di discesa da O a P risulti **<u>minimo</u>**?

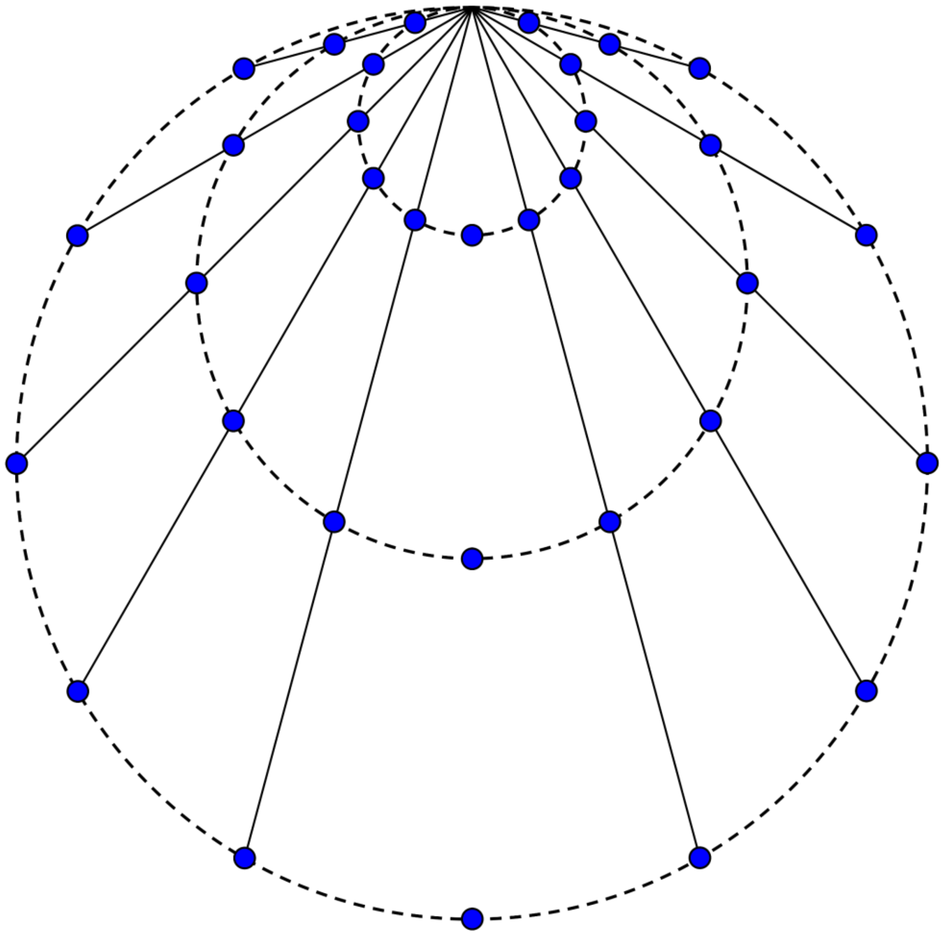
Problema della discesa più rapida



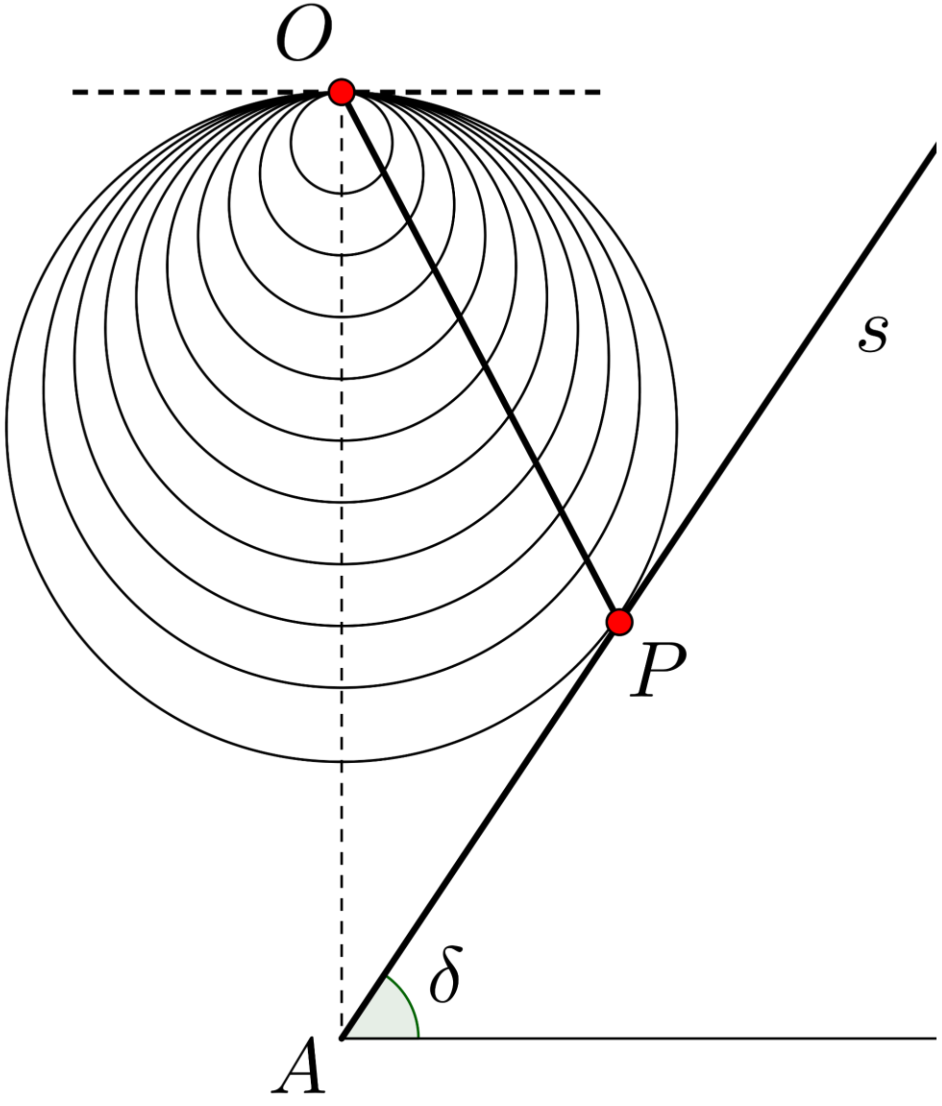


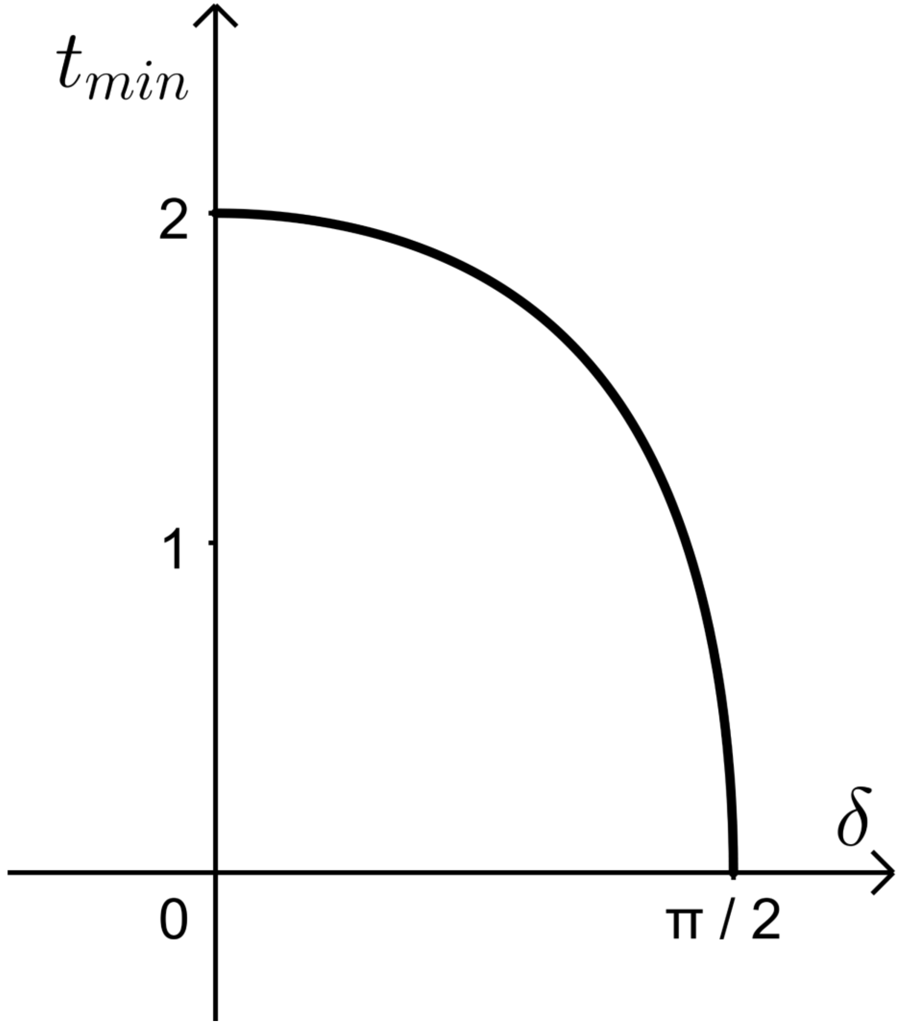
Problema della discesa più rapida



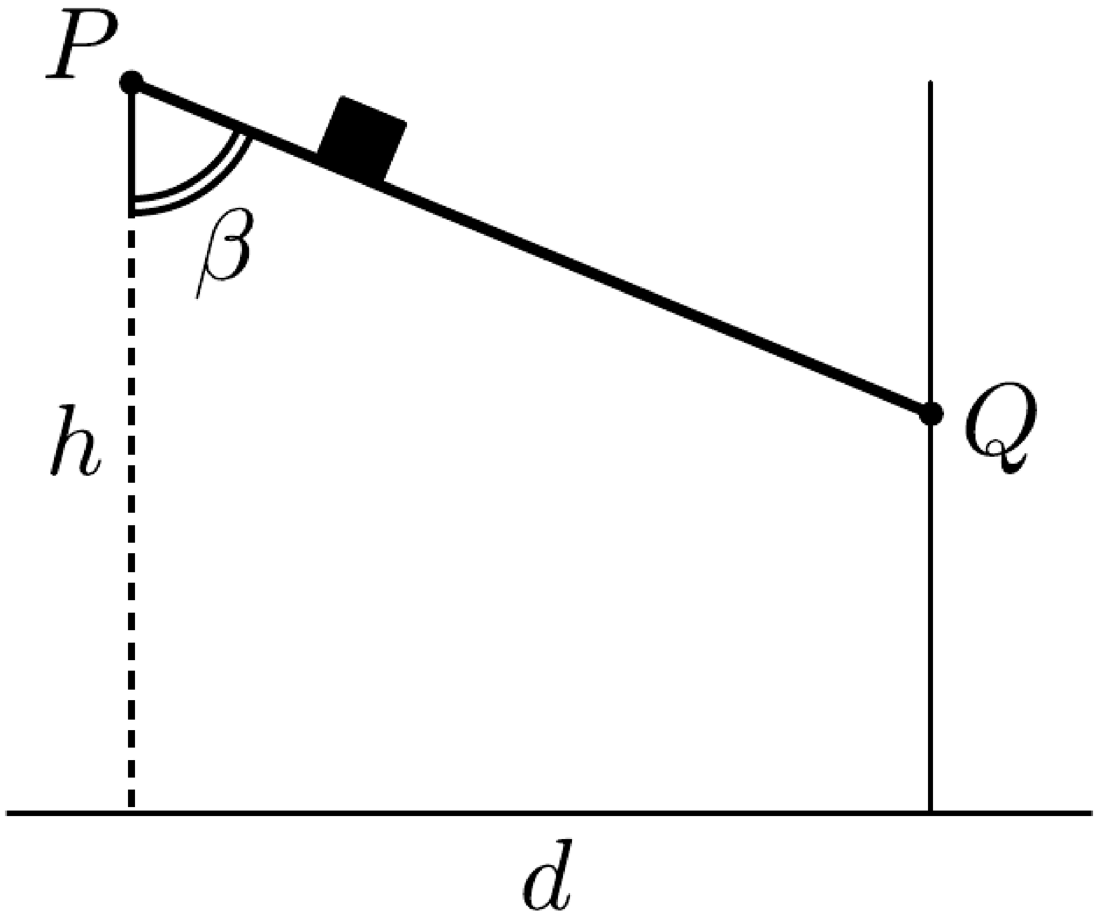


Problema della discesa più rapida



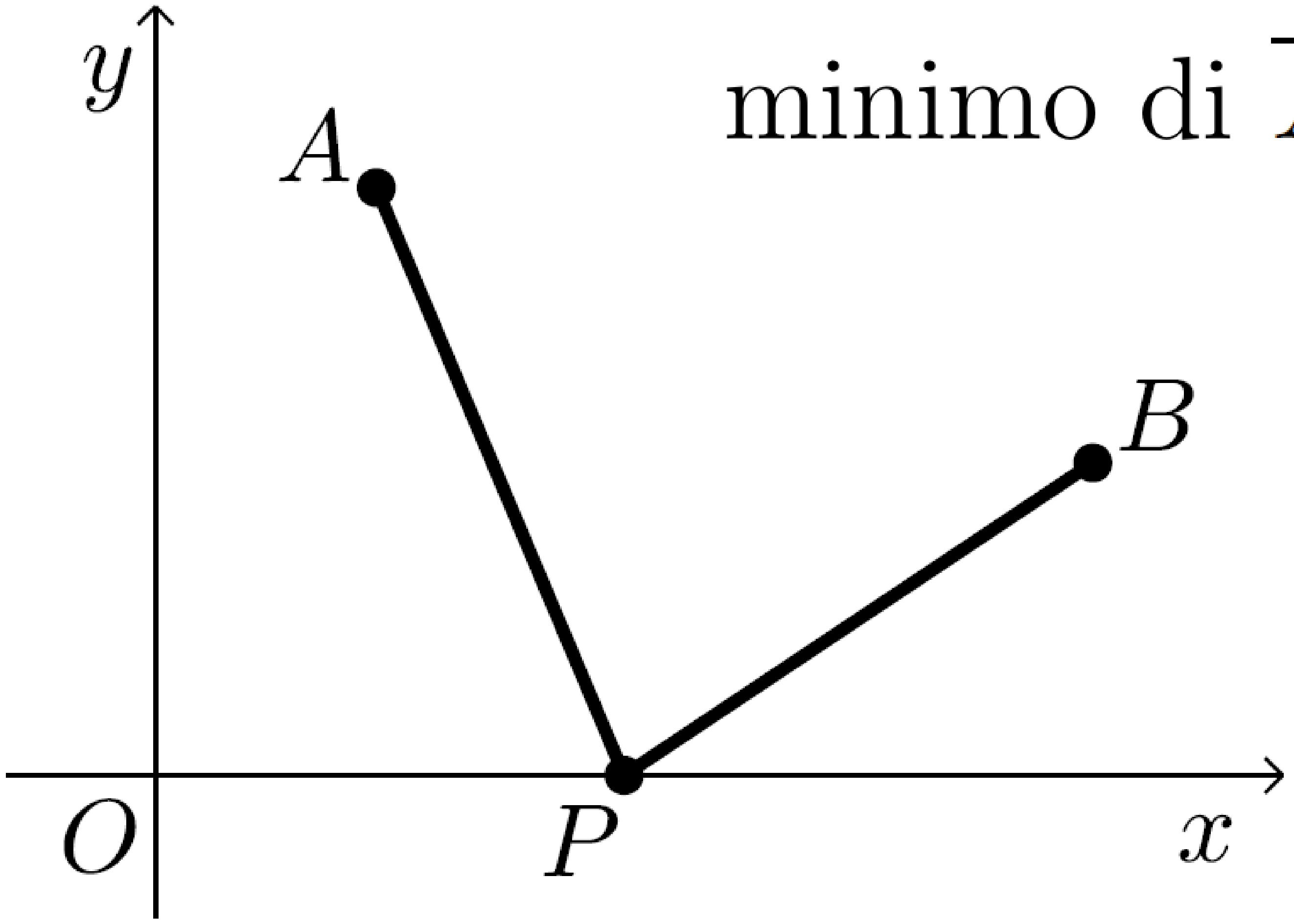


Problema della discesa più rapida (altro esempio)



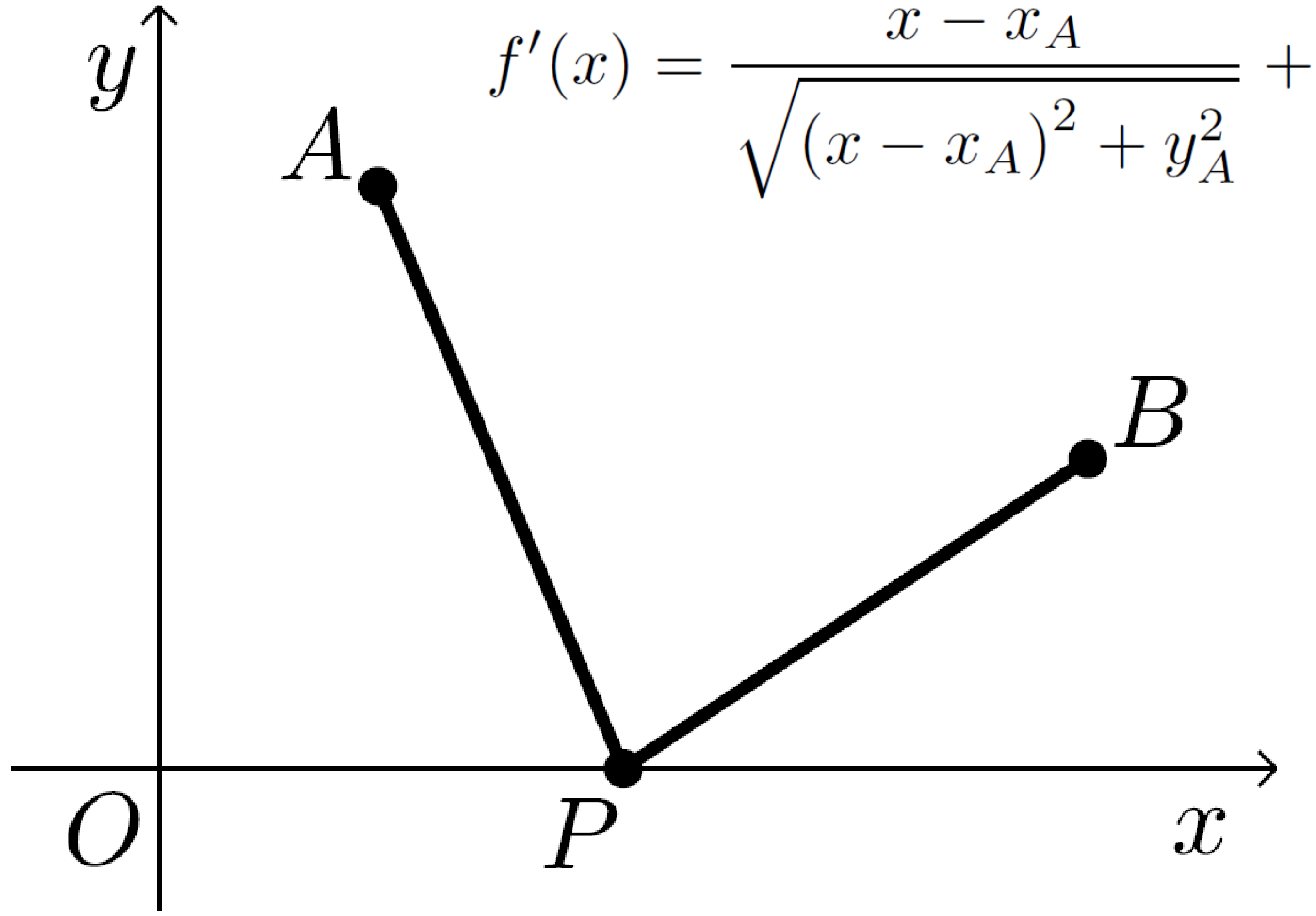
Problema di Erone

minimo di $\overline{AP} + \overline{PB}$

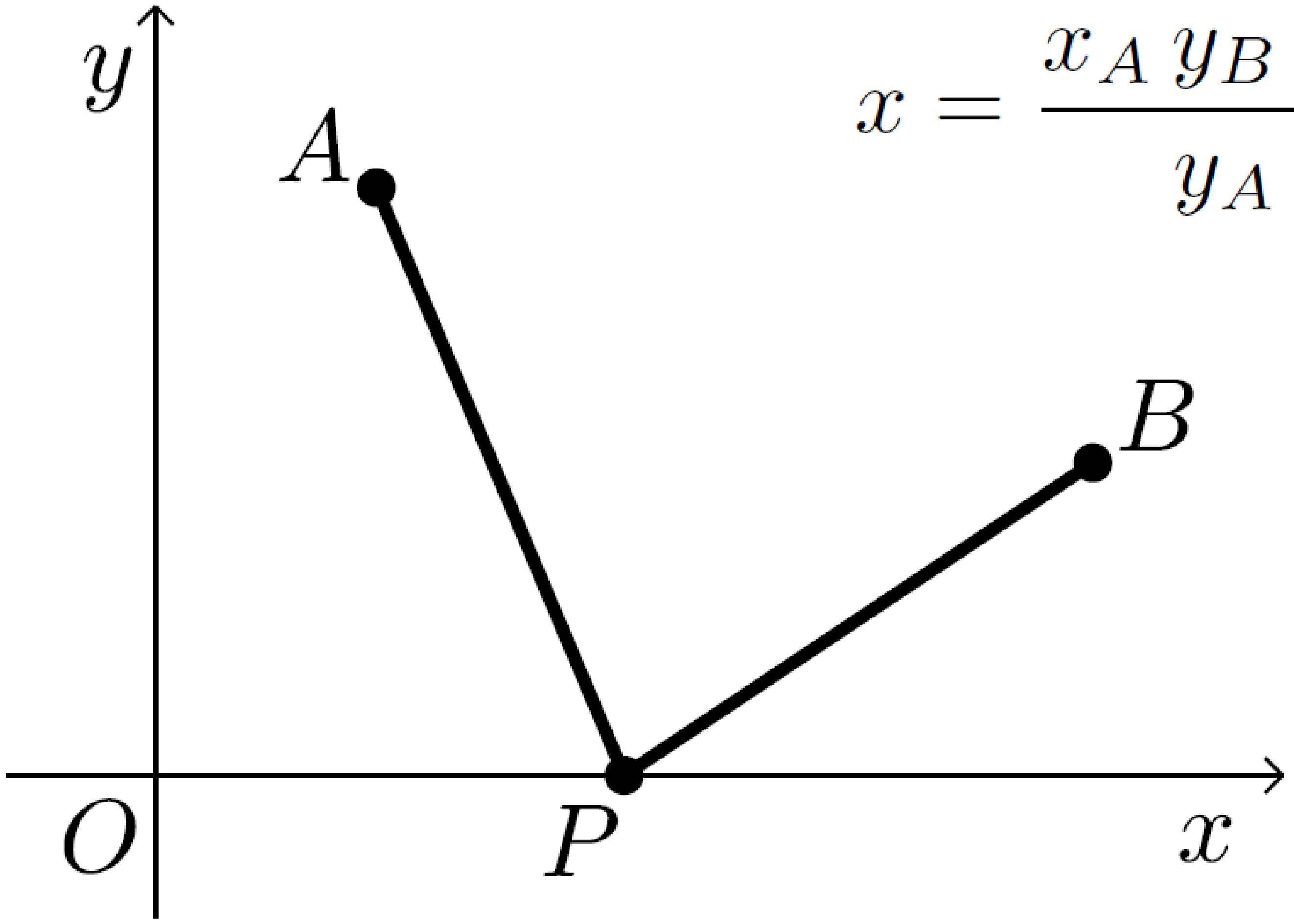


Problema di Erone

$$f'(x) = \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} + \frac{x - x_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}}$$

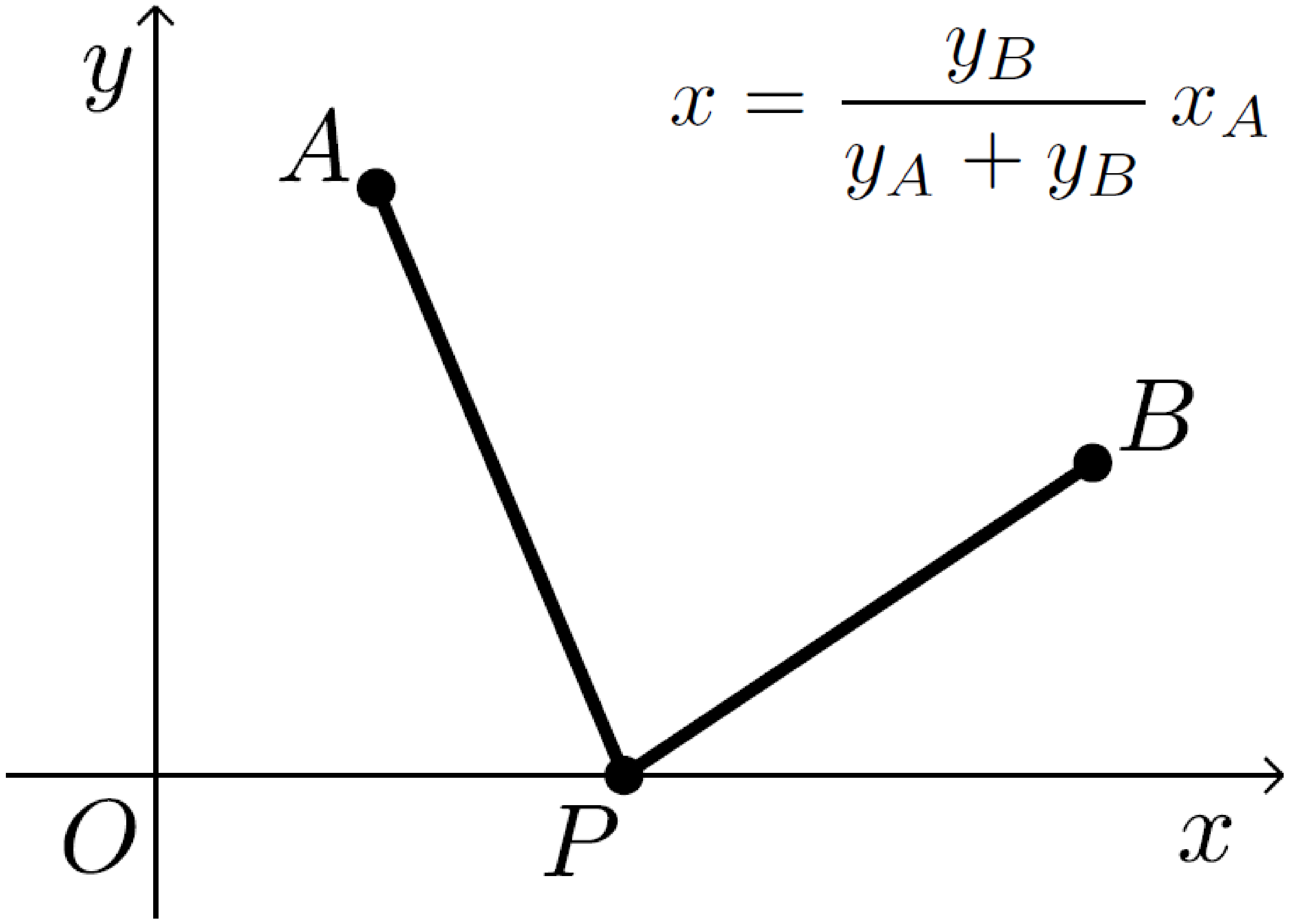


Problema di Erone



$$x = \frac{x_A\, y_B + x_B\, y_A}{y_A + y_B}$$

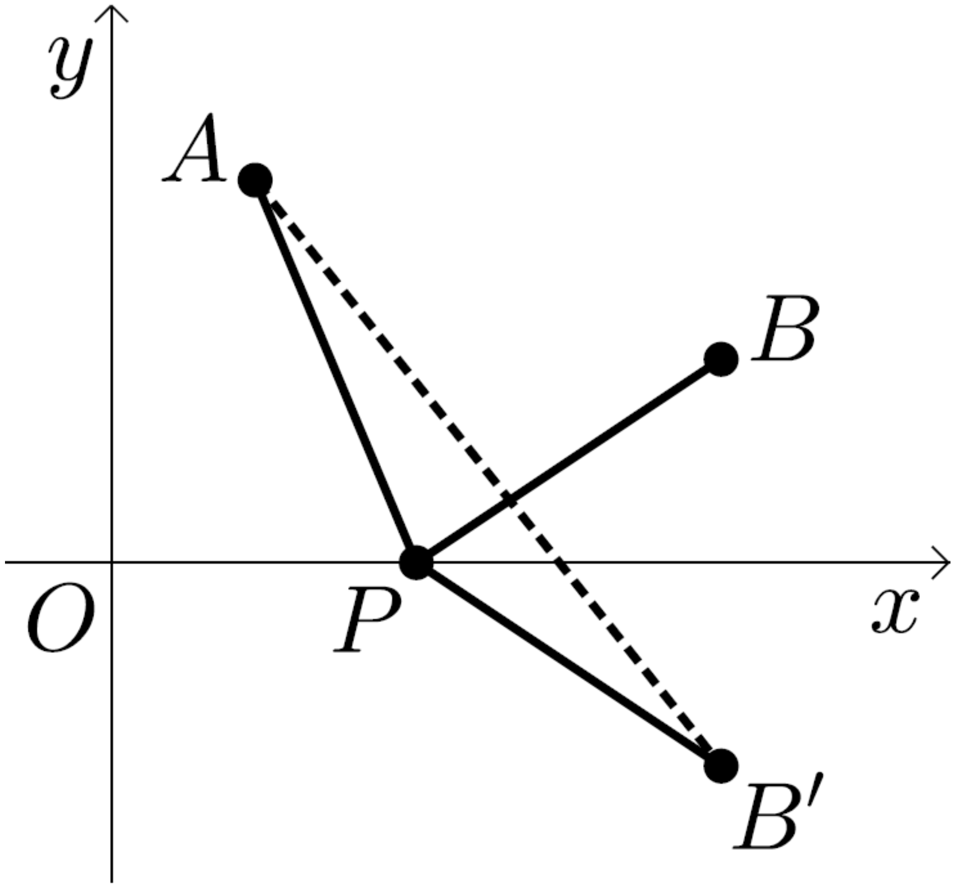
Problema di Erone



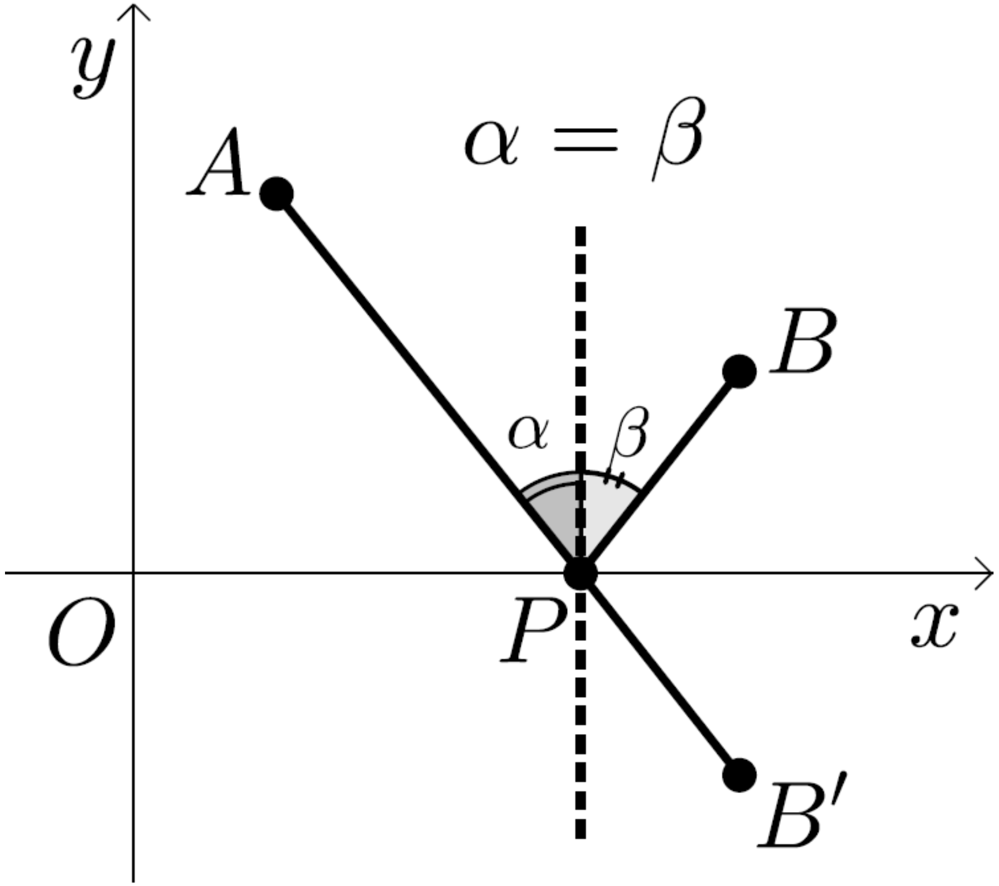
$$x = \frac{y_B}{y_A + y_B}\, x_A + \frac{y_A}{y_A + y_B}\, x_B$$

Problema di Erone

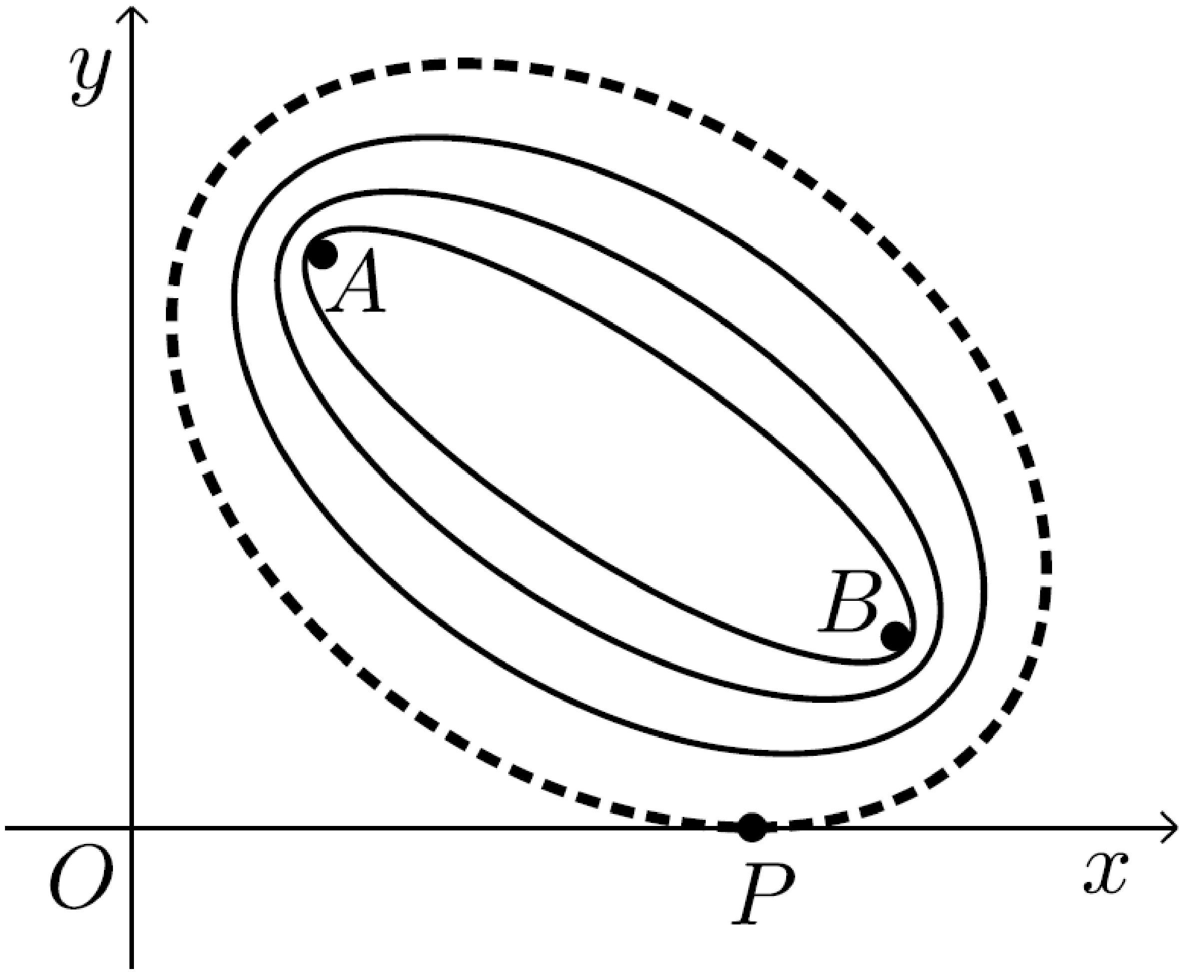
$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'}.$$



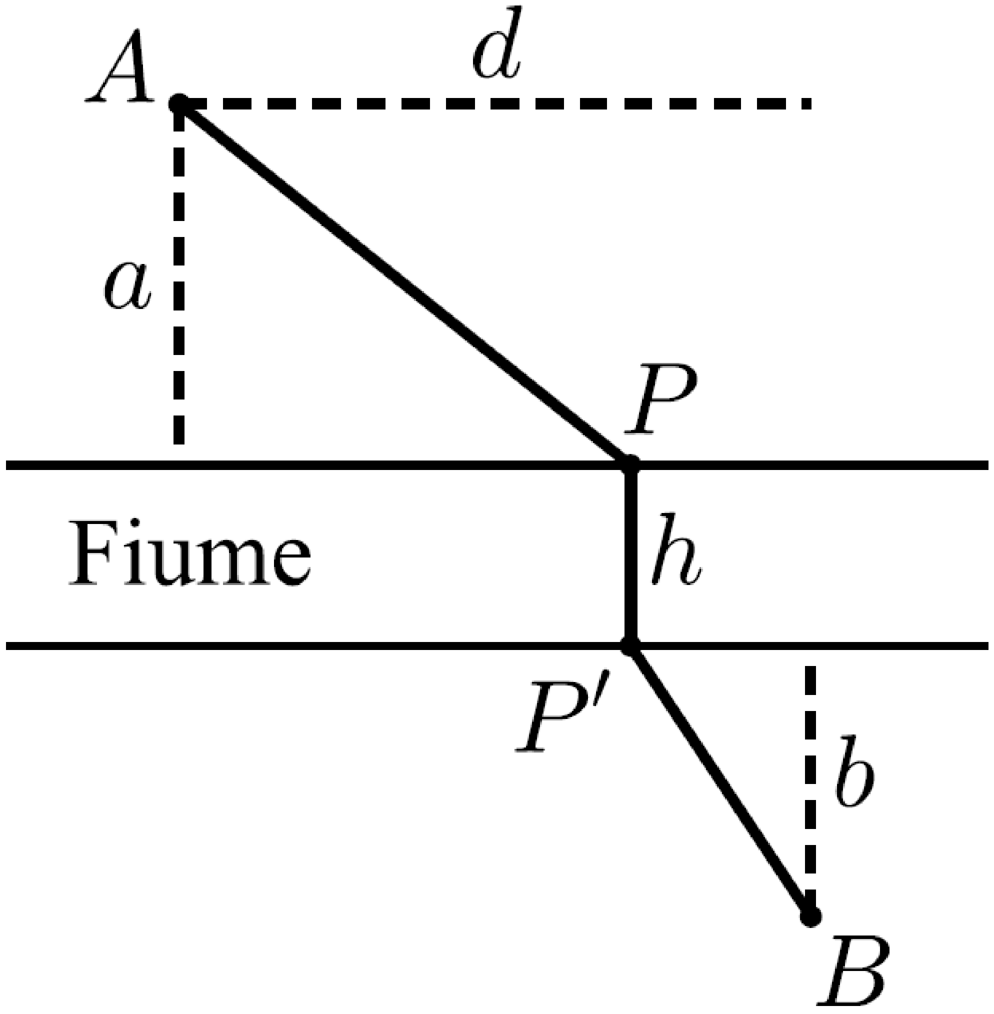
Problema di Erone



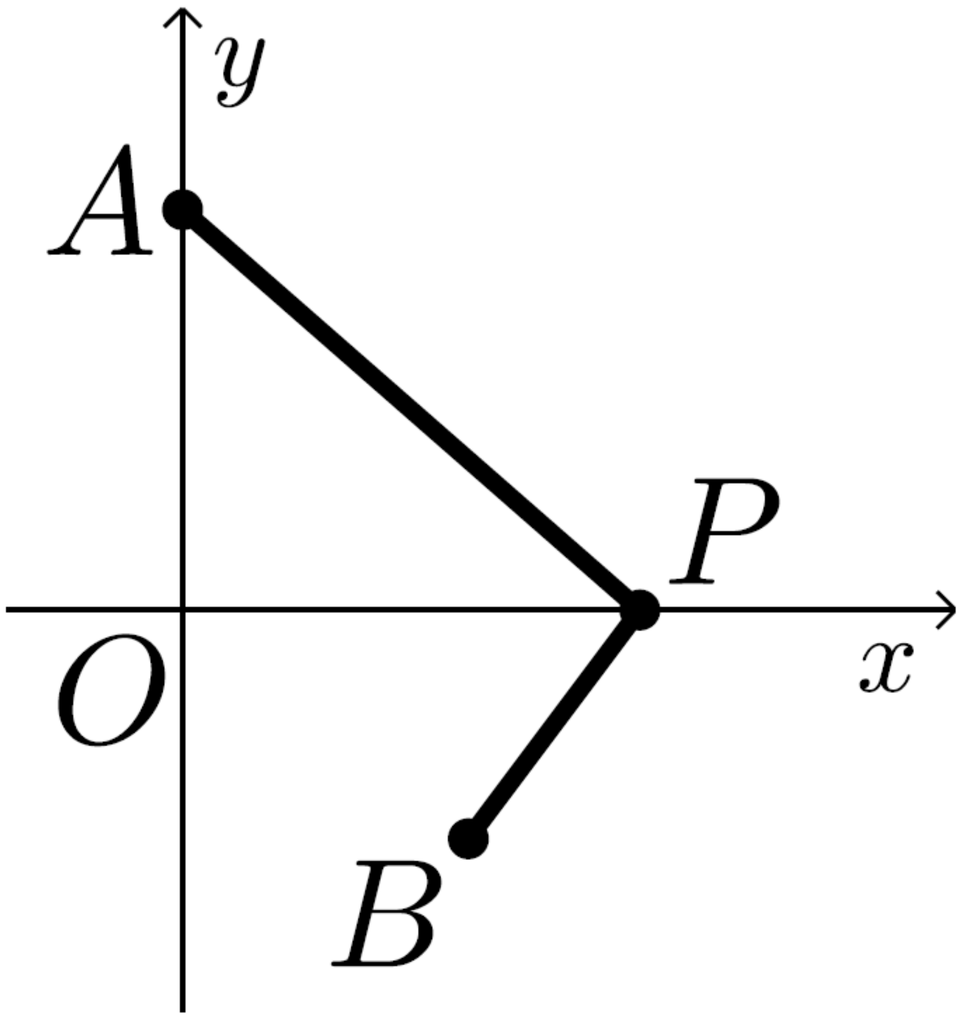
Problema di Erone



Problema di Erone: varianti



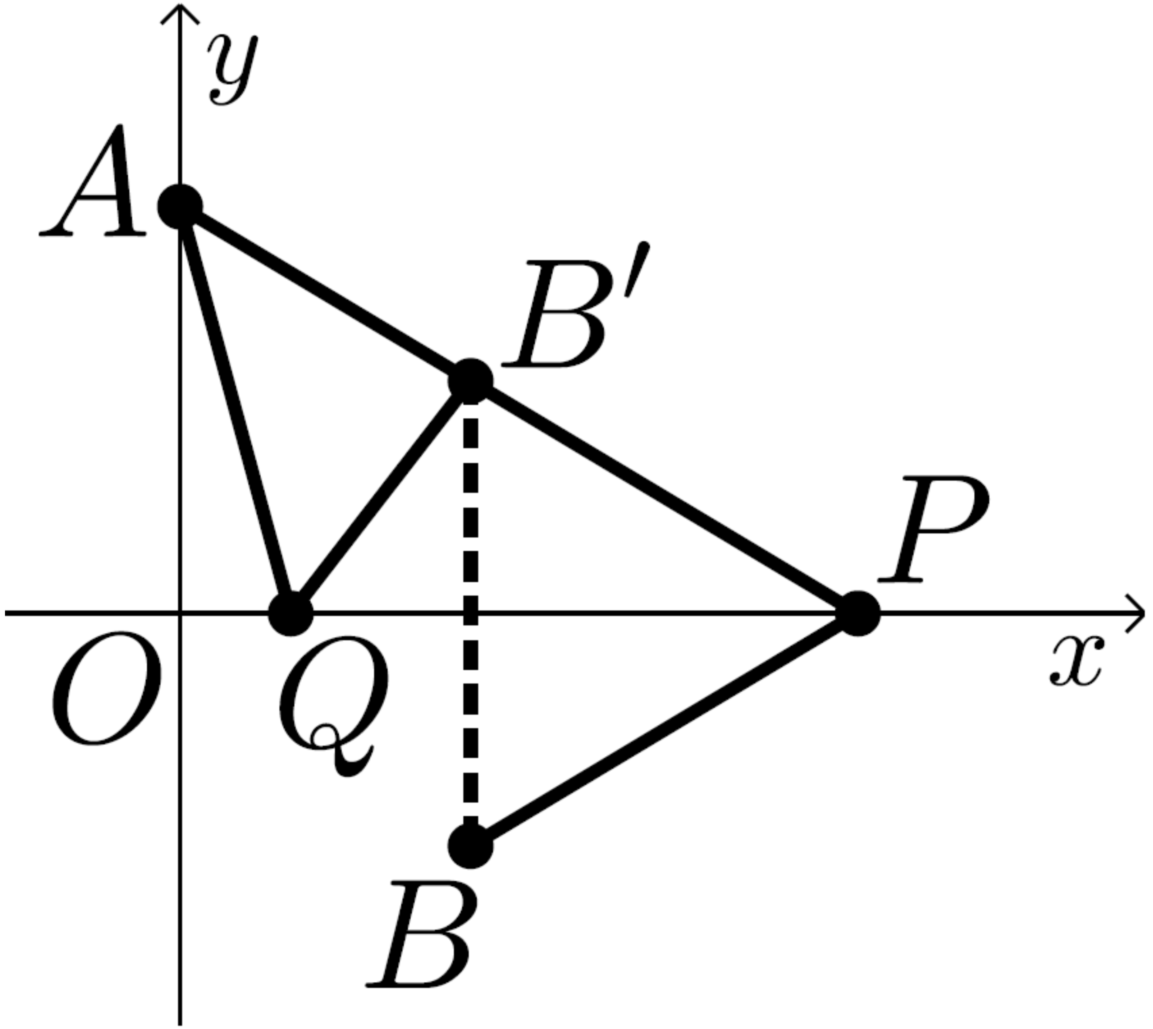
Problema di Erone: altre varianti



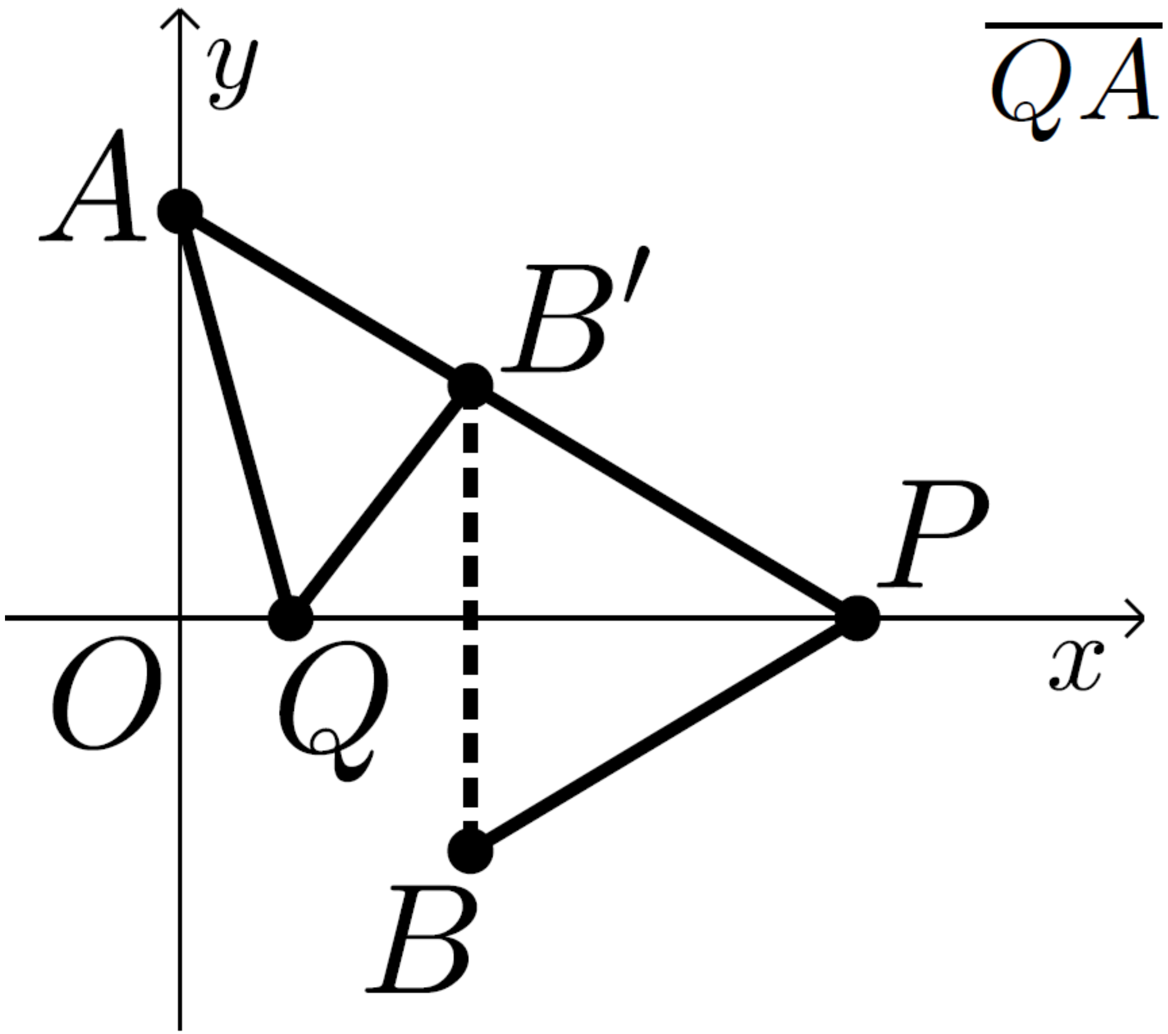
$A(0\,;a),\ B(L\,;-b)$

Massimo di $\overline{AP} - \overline{PB}$

Problema di Erone: altre varianti

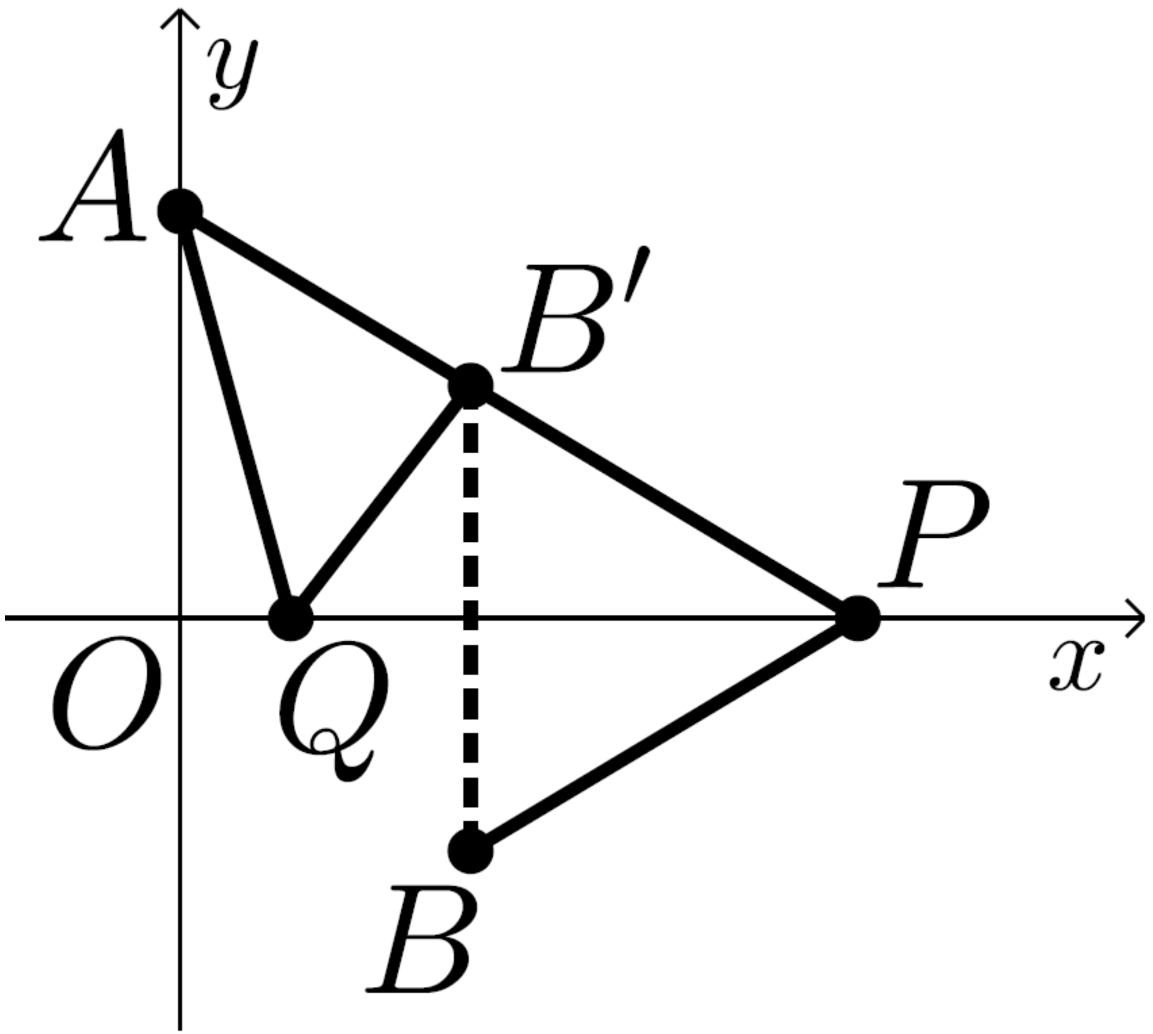


Problema di Erone: altre varianti



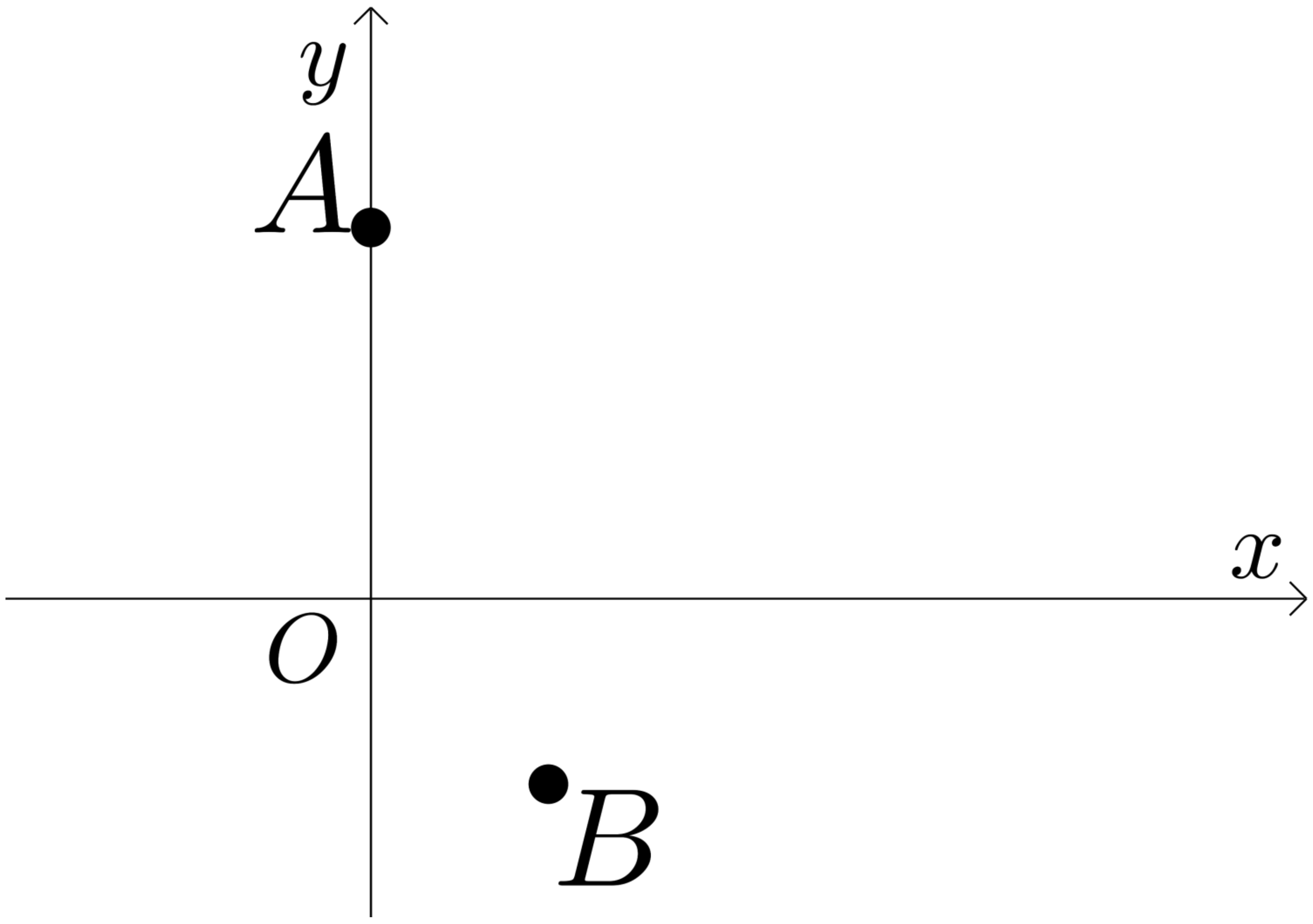
$$
\begin{aligned}
\overline{QA} - \overline{QB} &\leqslant \left|\overline{QA} - \overline{QB}\right| \\
&= \left|\overline{QA} - \overline{QB'}\right| \\
&< \overline{AB'} \\
&= \overline{PA} - \overline{PB'} \\
&= \overline{PA} - \overline{PB}
\end{aligned}
$$

Problema di Erone: altre varianti

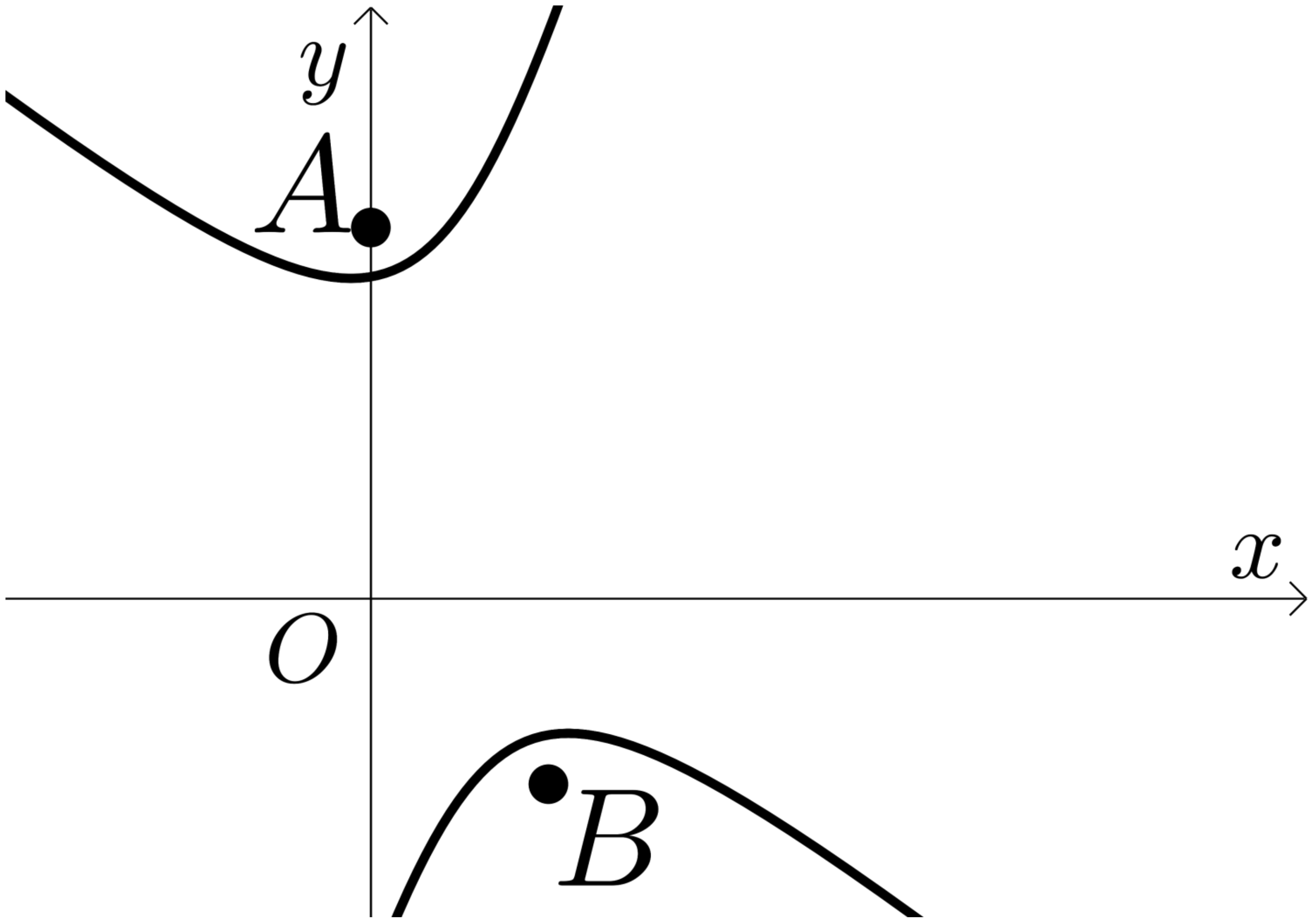


$$\overline{QA} - \overline{QB} < \overline{PA} - \overline{PB}$$

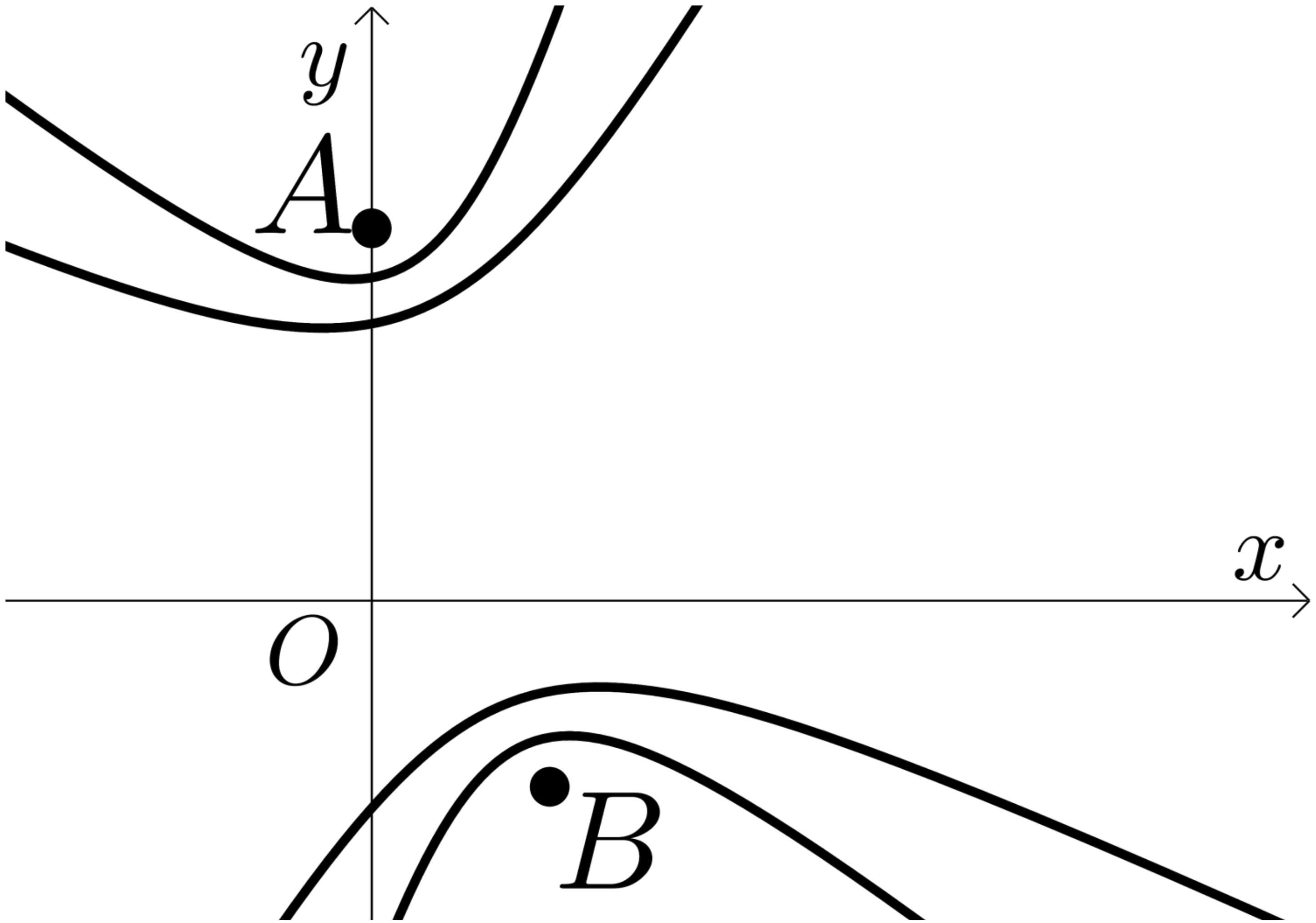
Problema di Erone: altre varianti



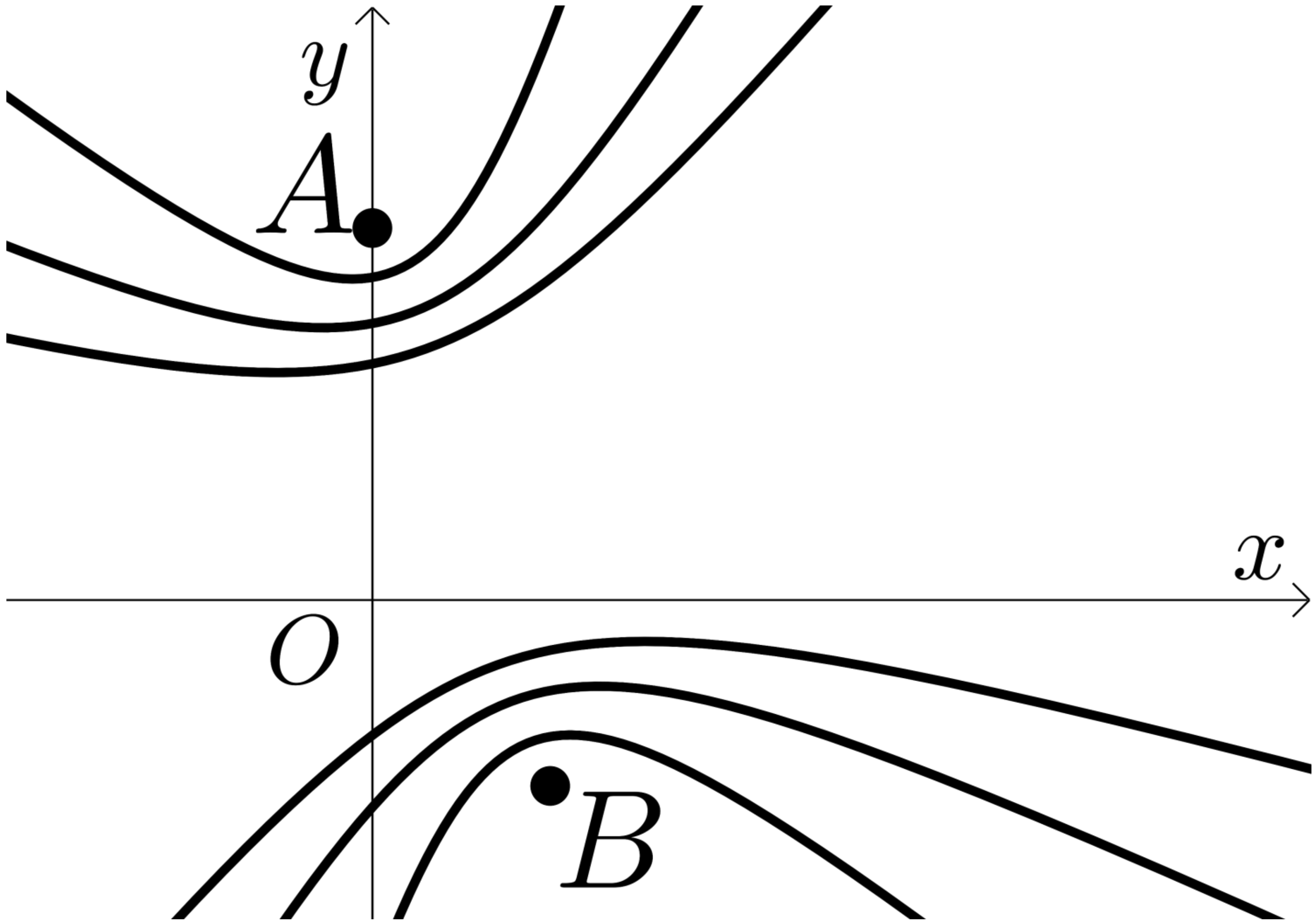
Problema di Erone: altre varianti



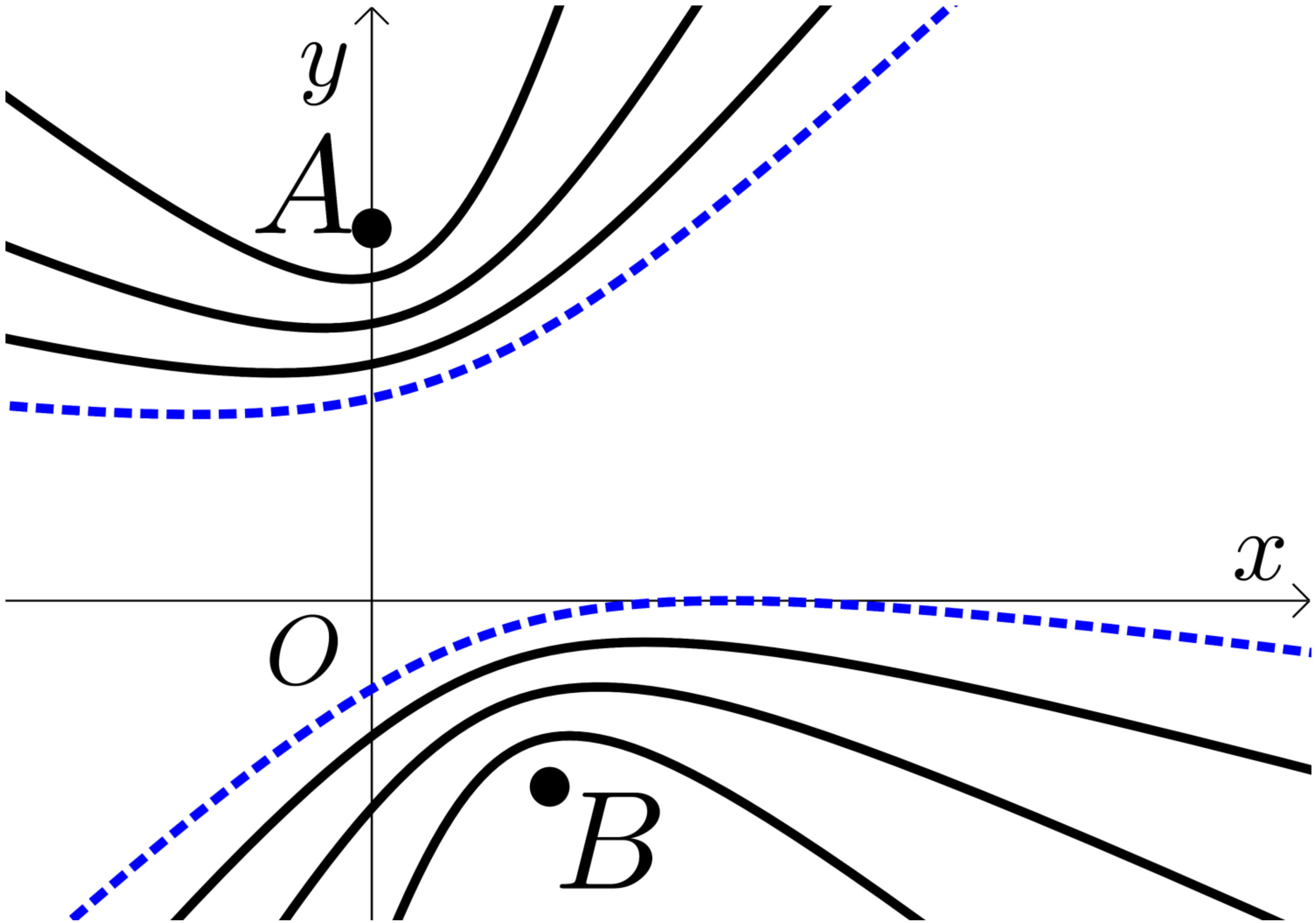
Problema di Erone: altre varianti



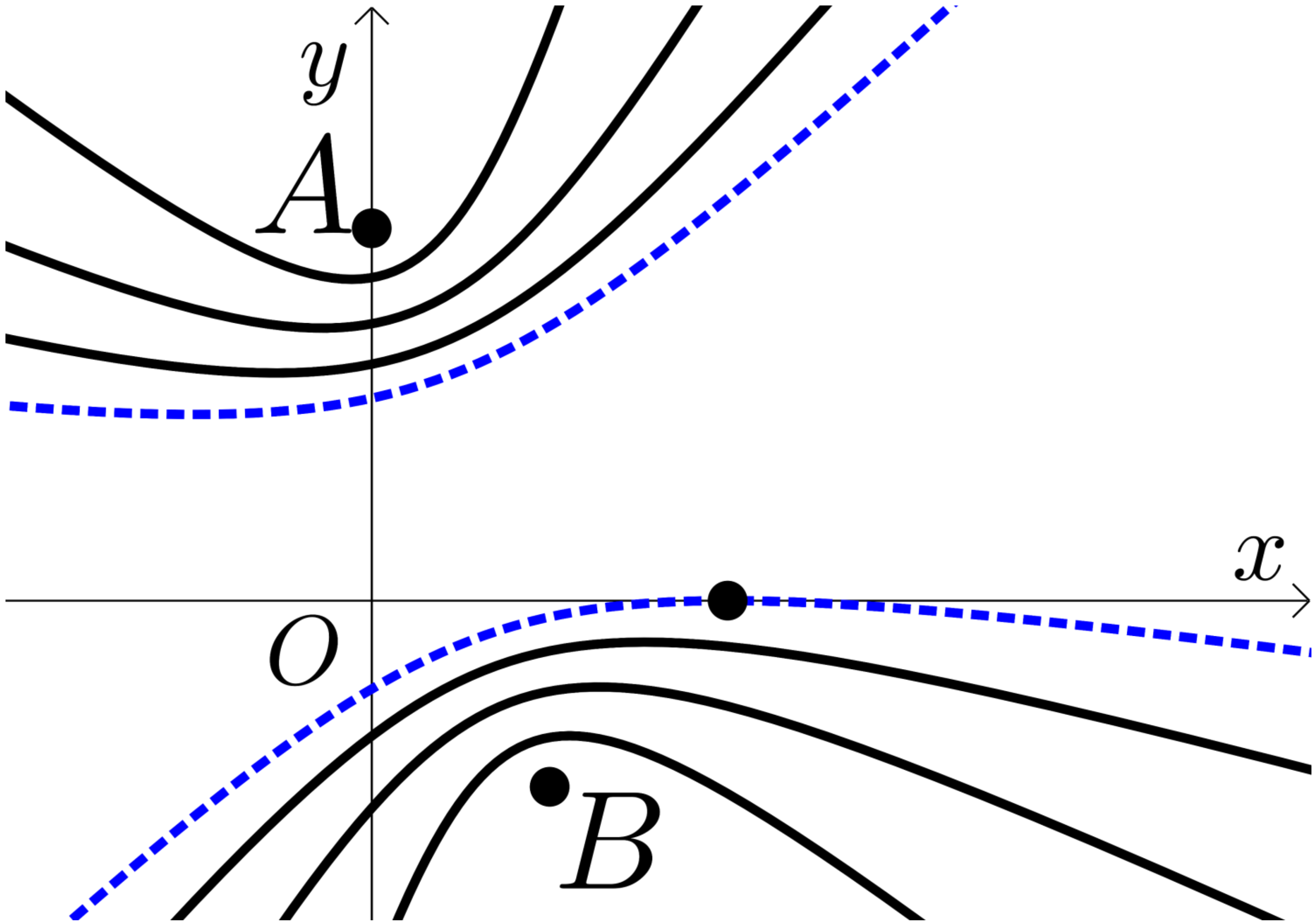
Problema di Erone: altre varianti



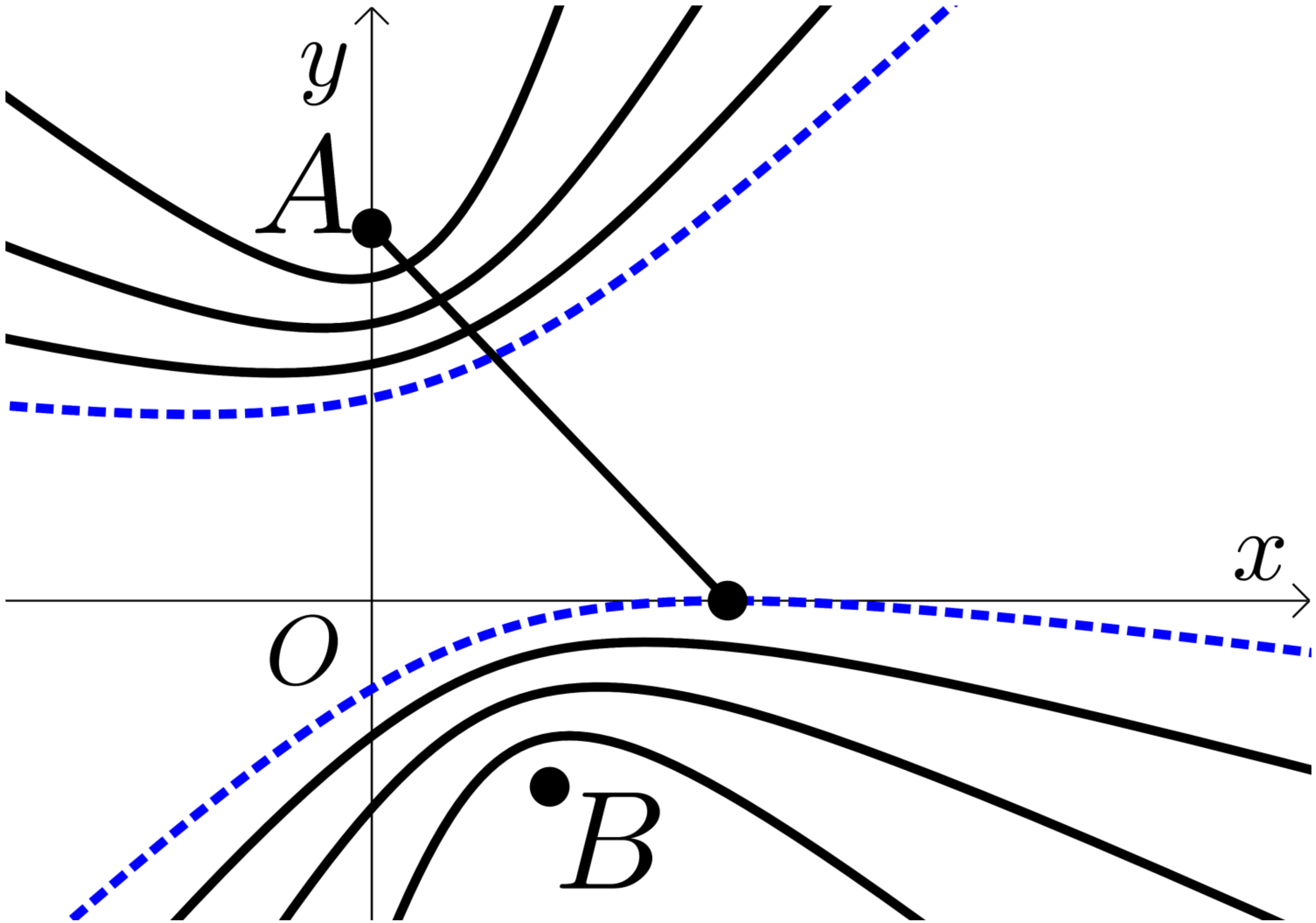
Problema di Erone: altre varianti



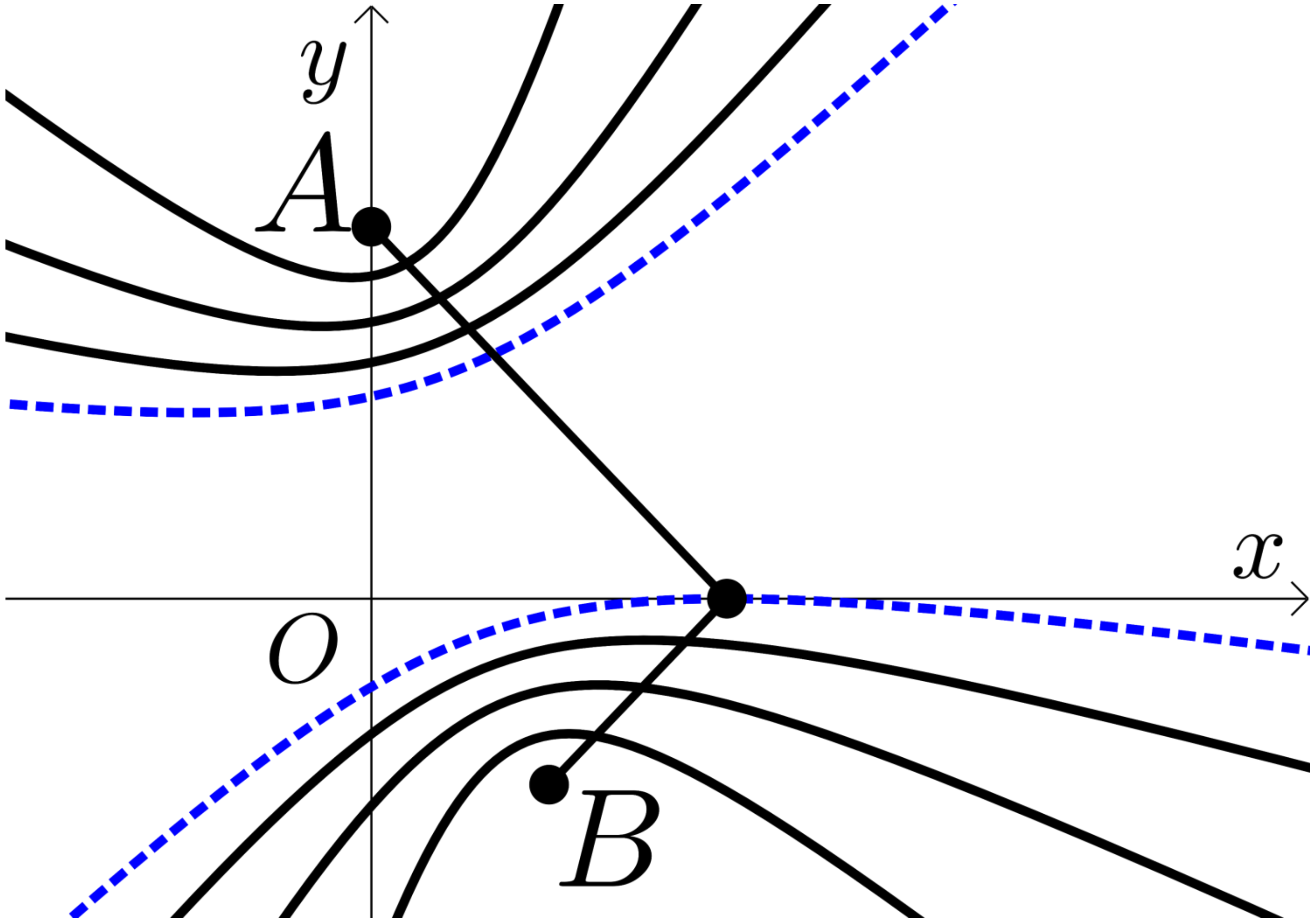
Problema di Erone: altre varianti



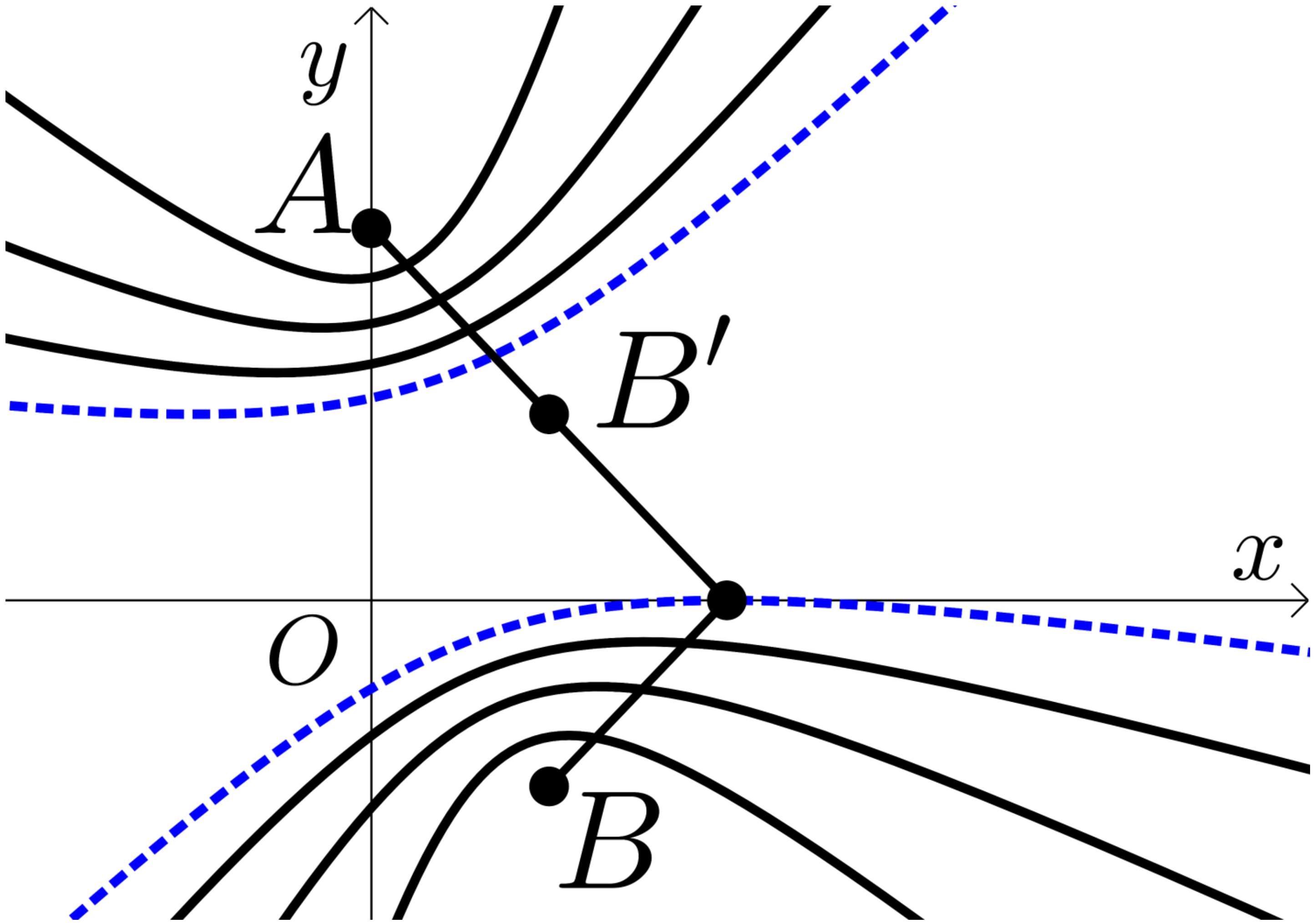
Problema di Erone: altre varianti



Problema di Erone: altre varianti



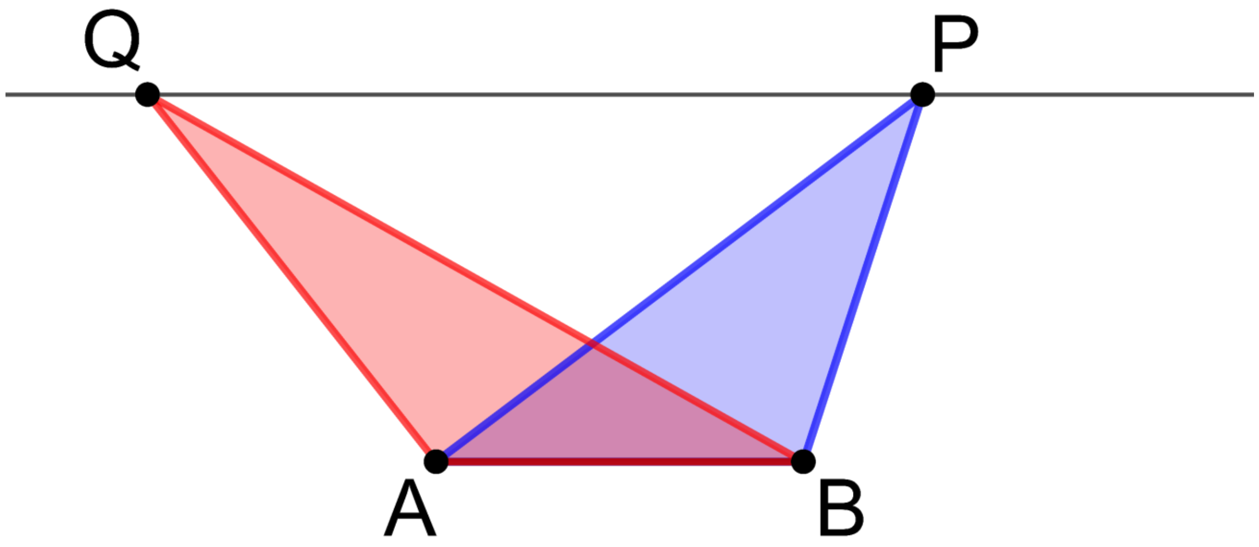
Problema di Erone: altre varianti



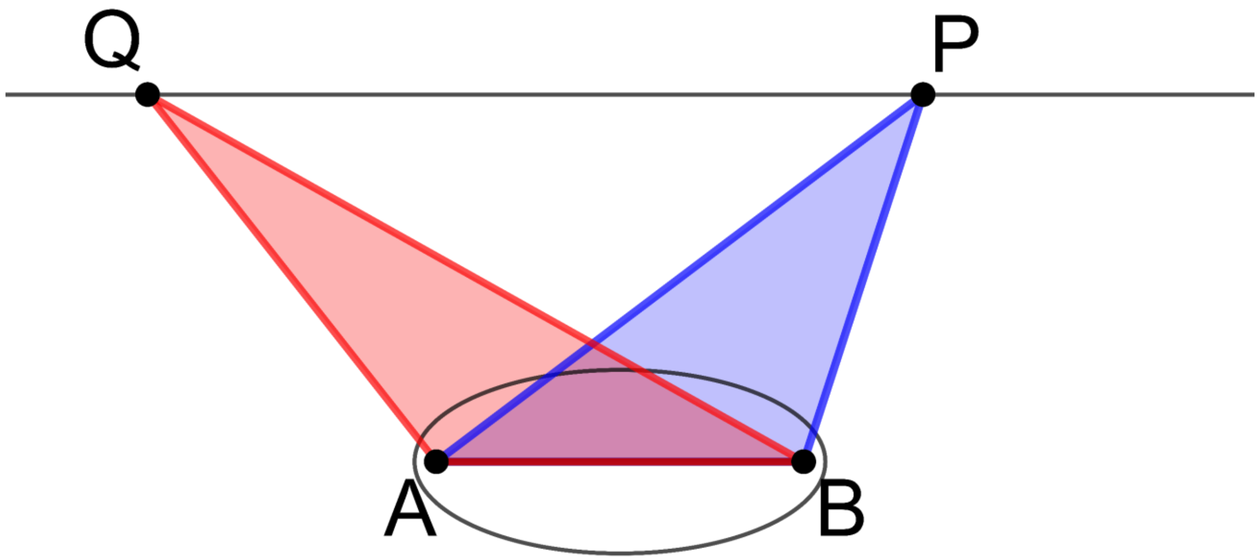
Problema di Erone: variante

Fra i triangoli con un lato fissato e area data, determinare quello di perimetro minimo

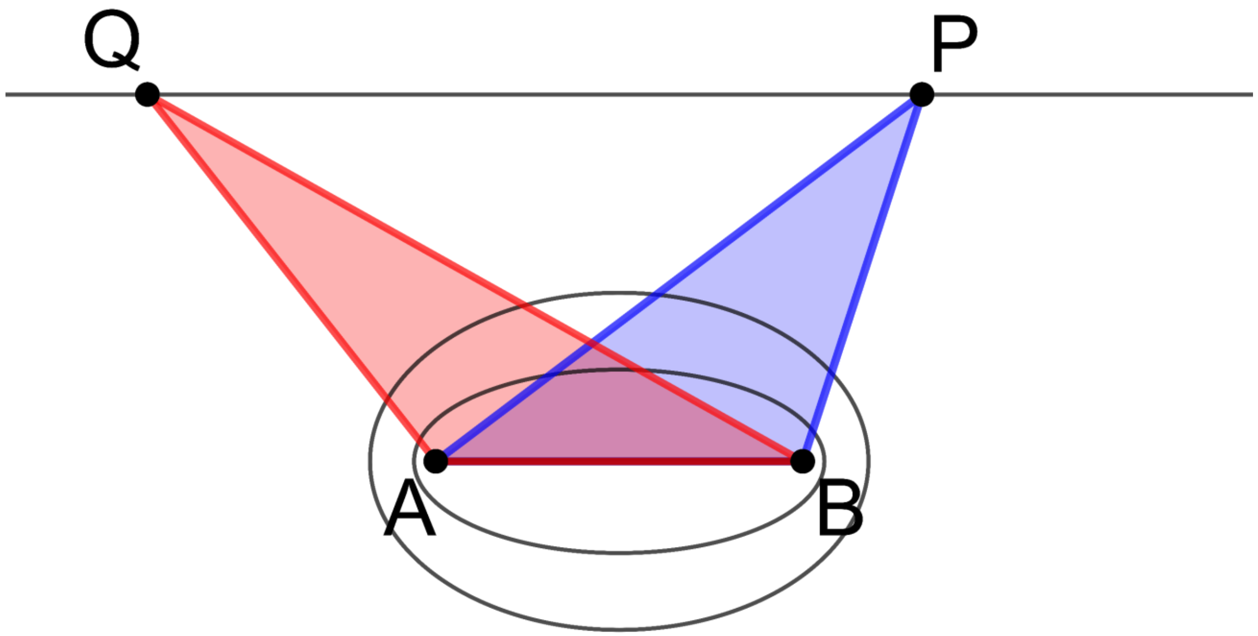
Problema di Erone: variante



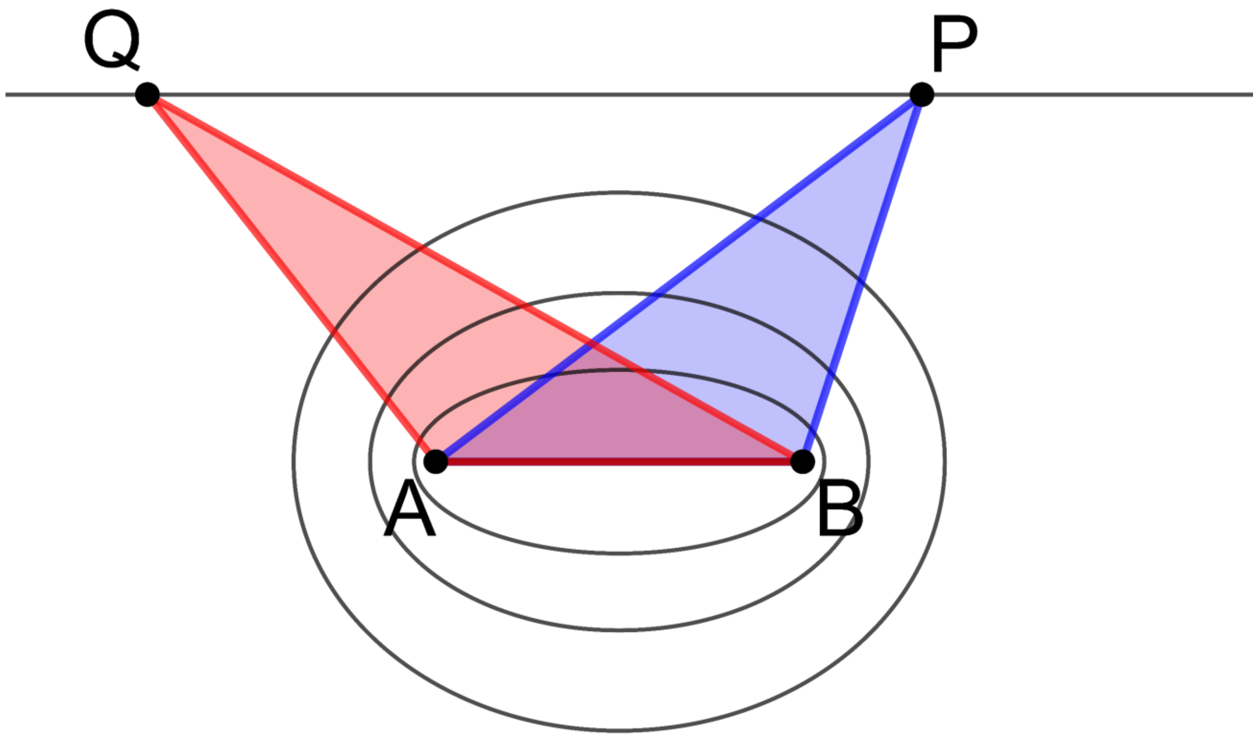
Problema di Erone: variante



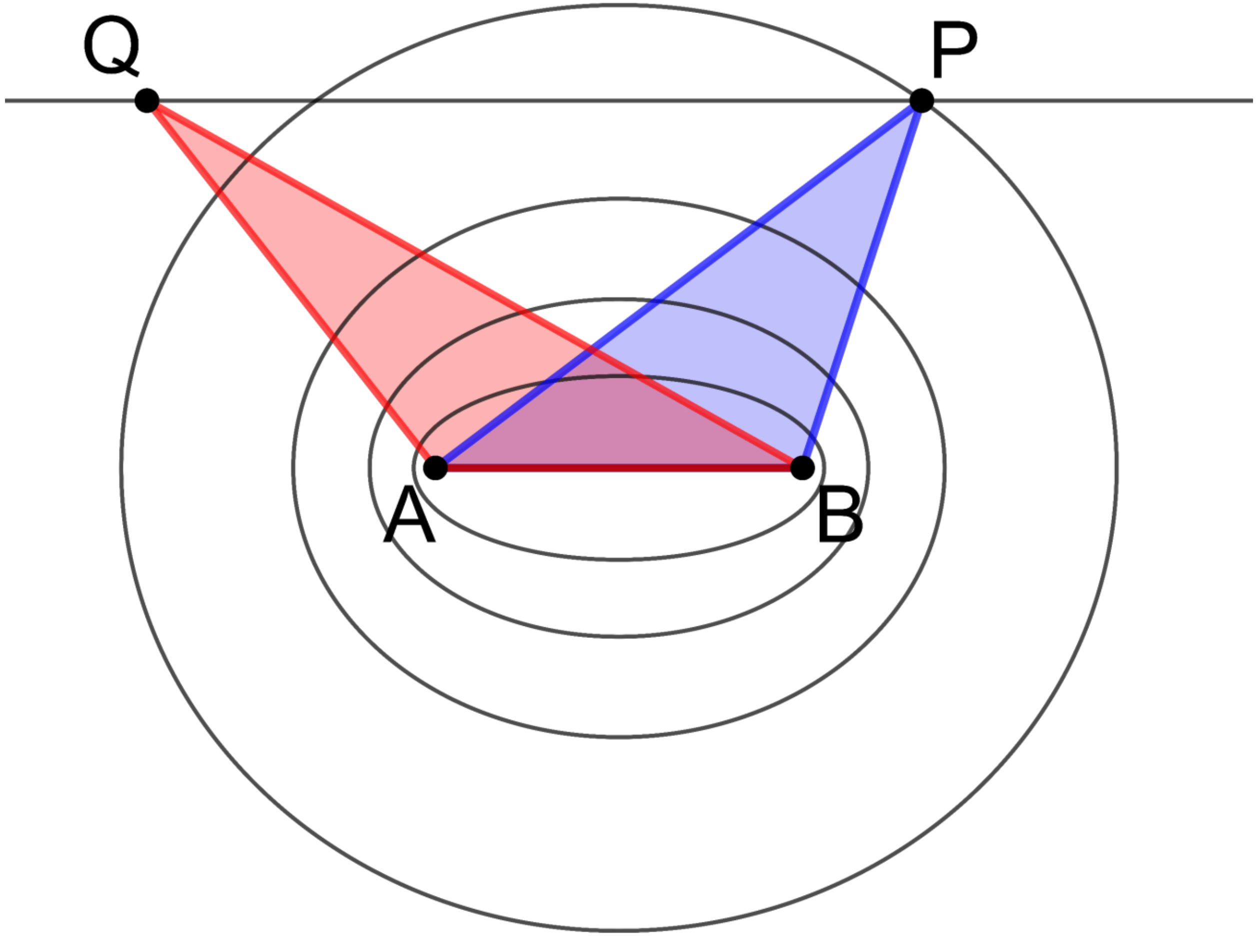
Problema di Erone: variante



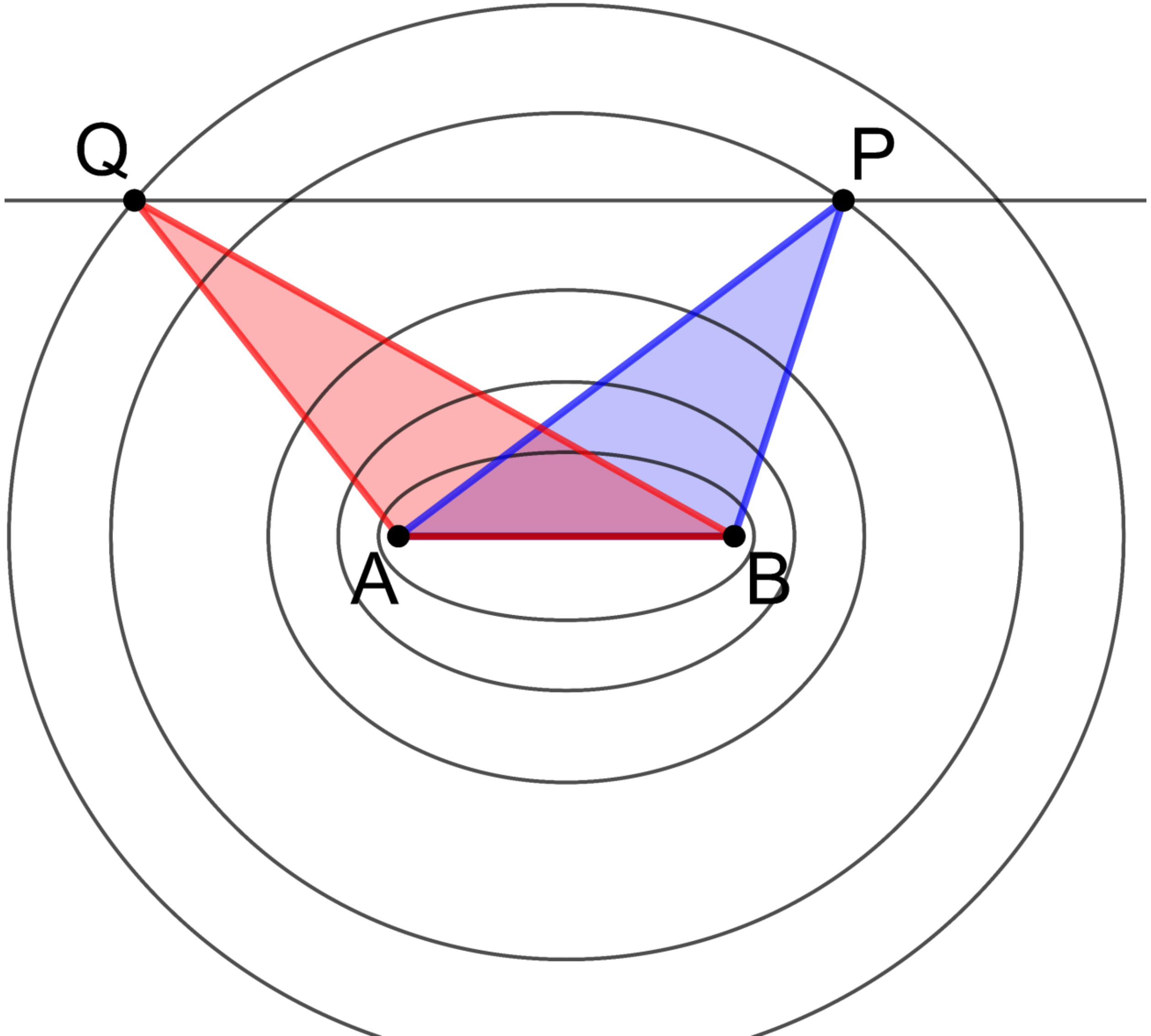
Problema di Erone: variante



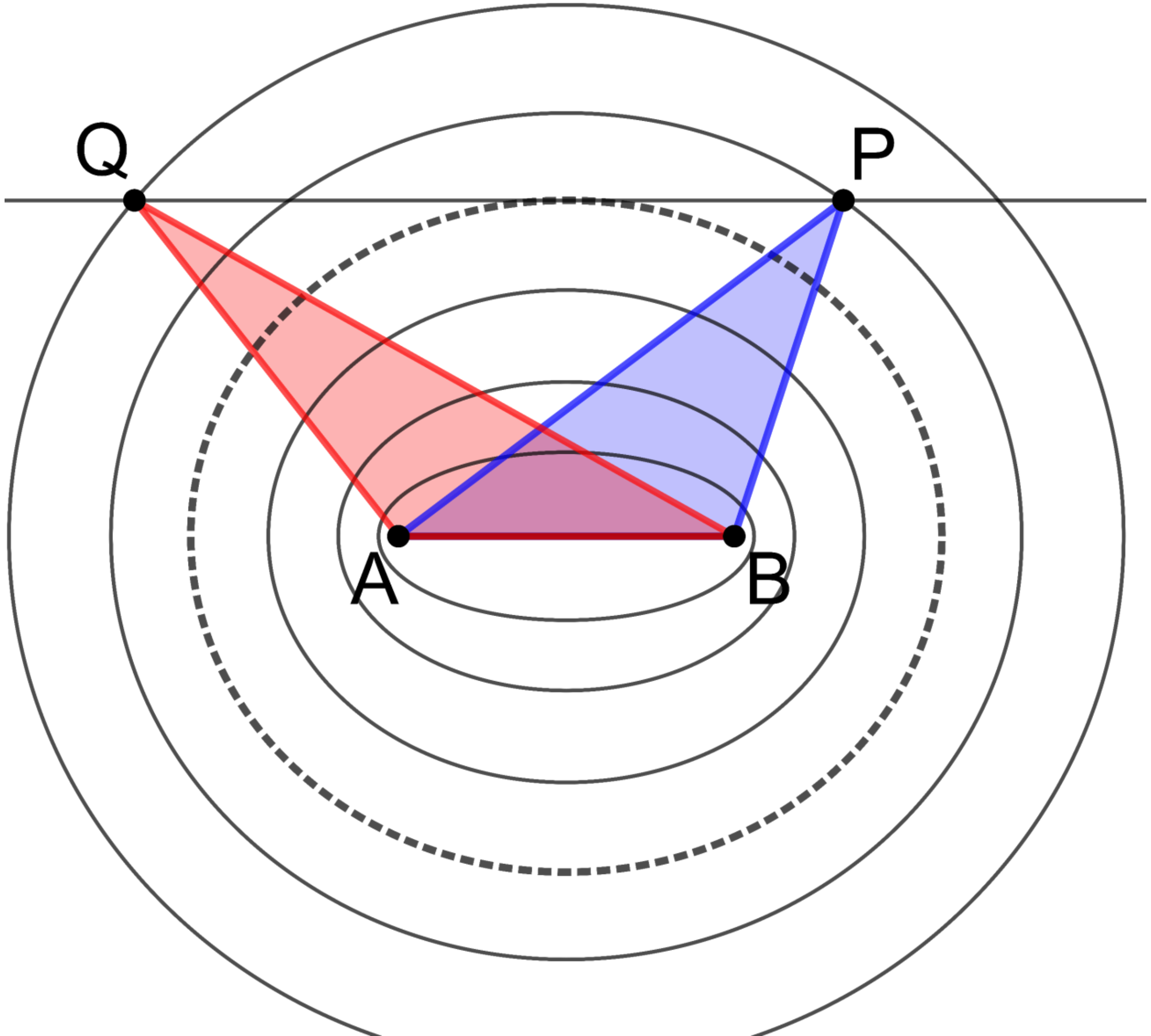
Problema di Erone: variante



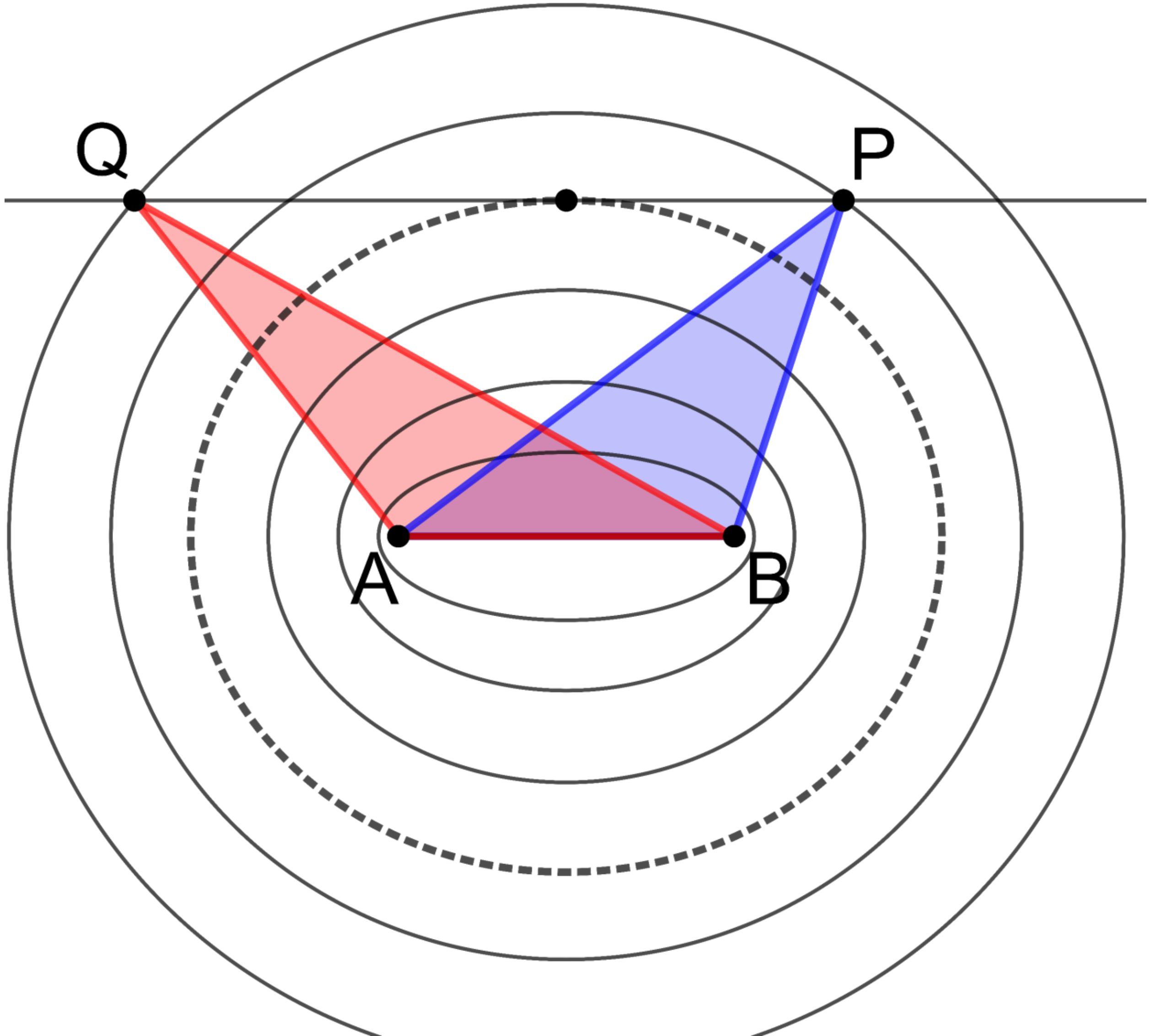
Problema di Erone: variante



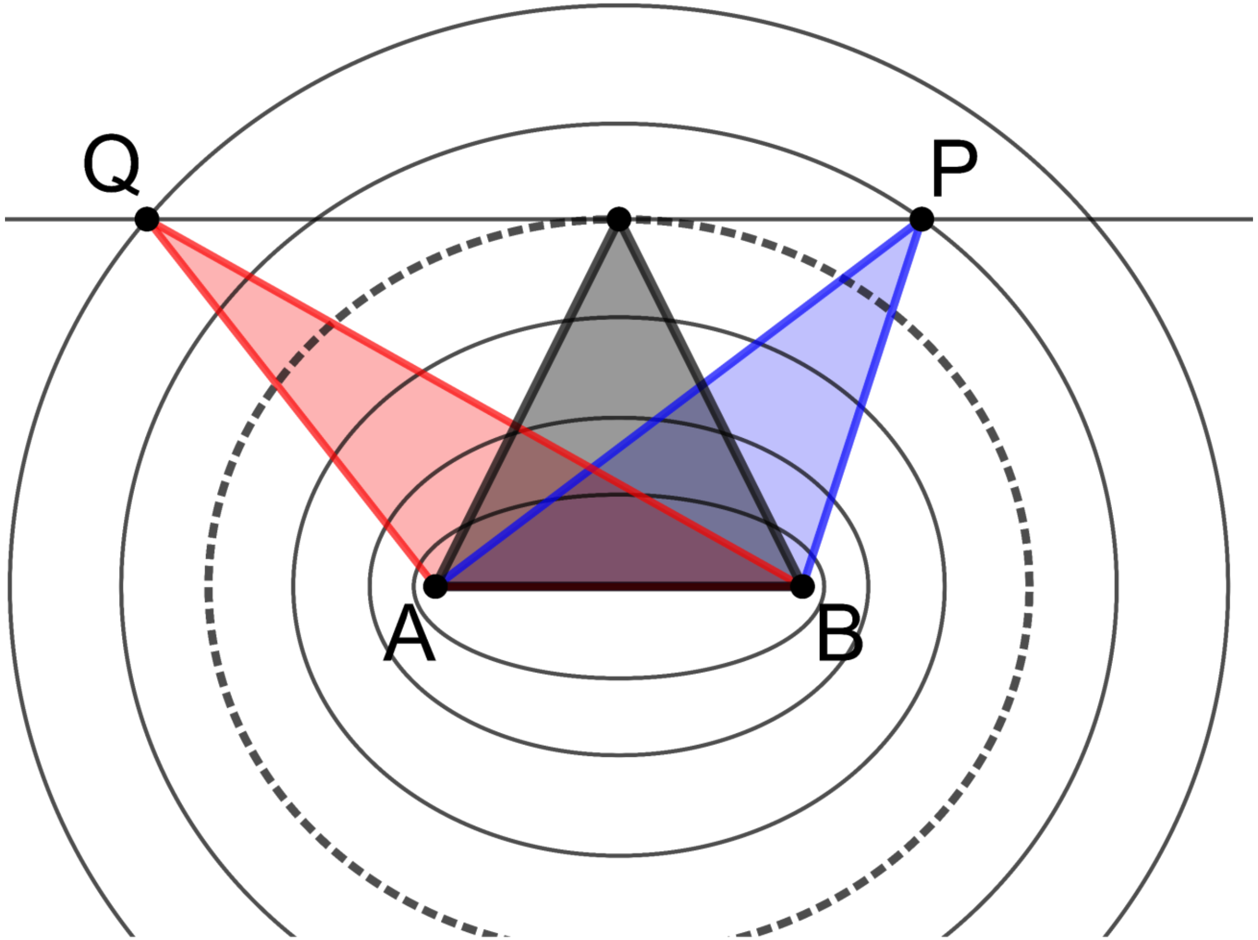
Problema di Erone: variante



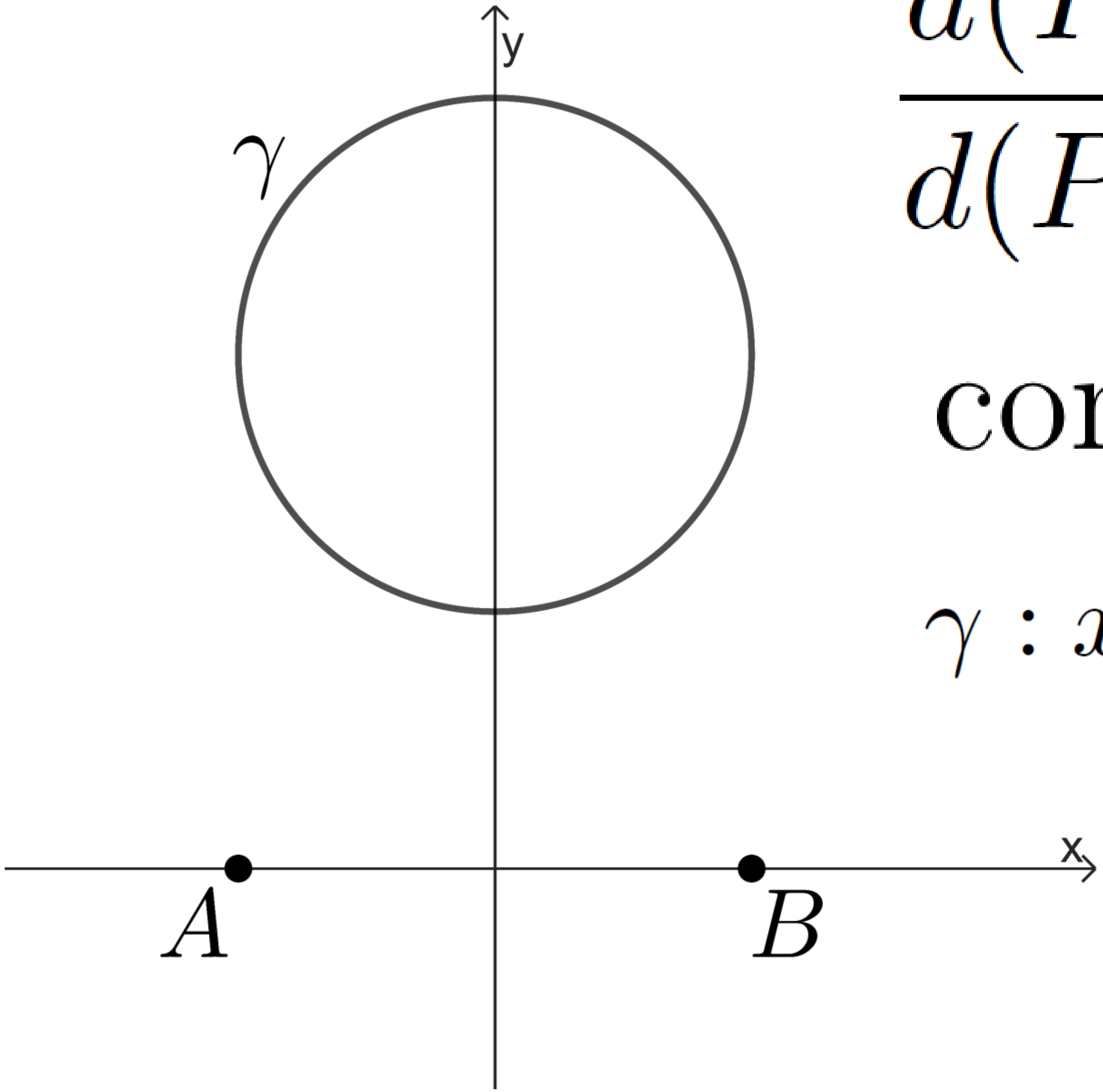
Problema di Erone: variante



Problema di Erone: variante



Cerchi di Apollonio

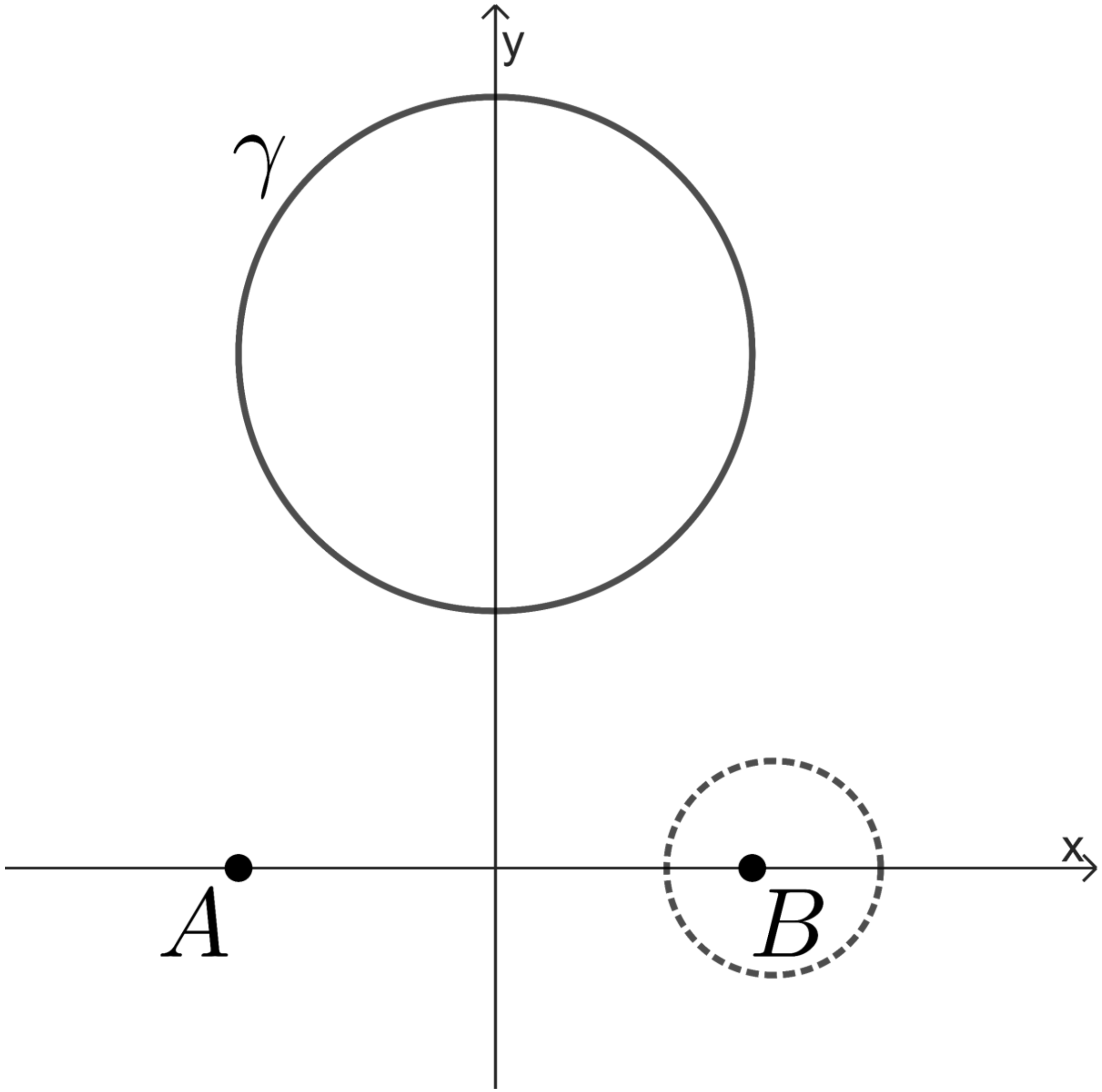


$$\frac{d(P,A)}{d(P,B)} \text{ massimo}$$

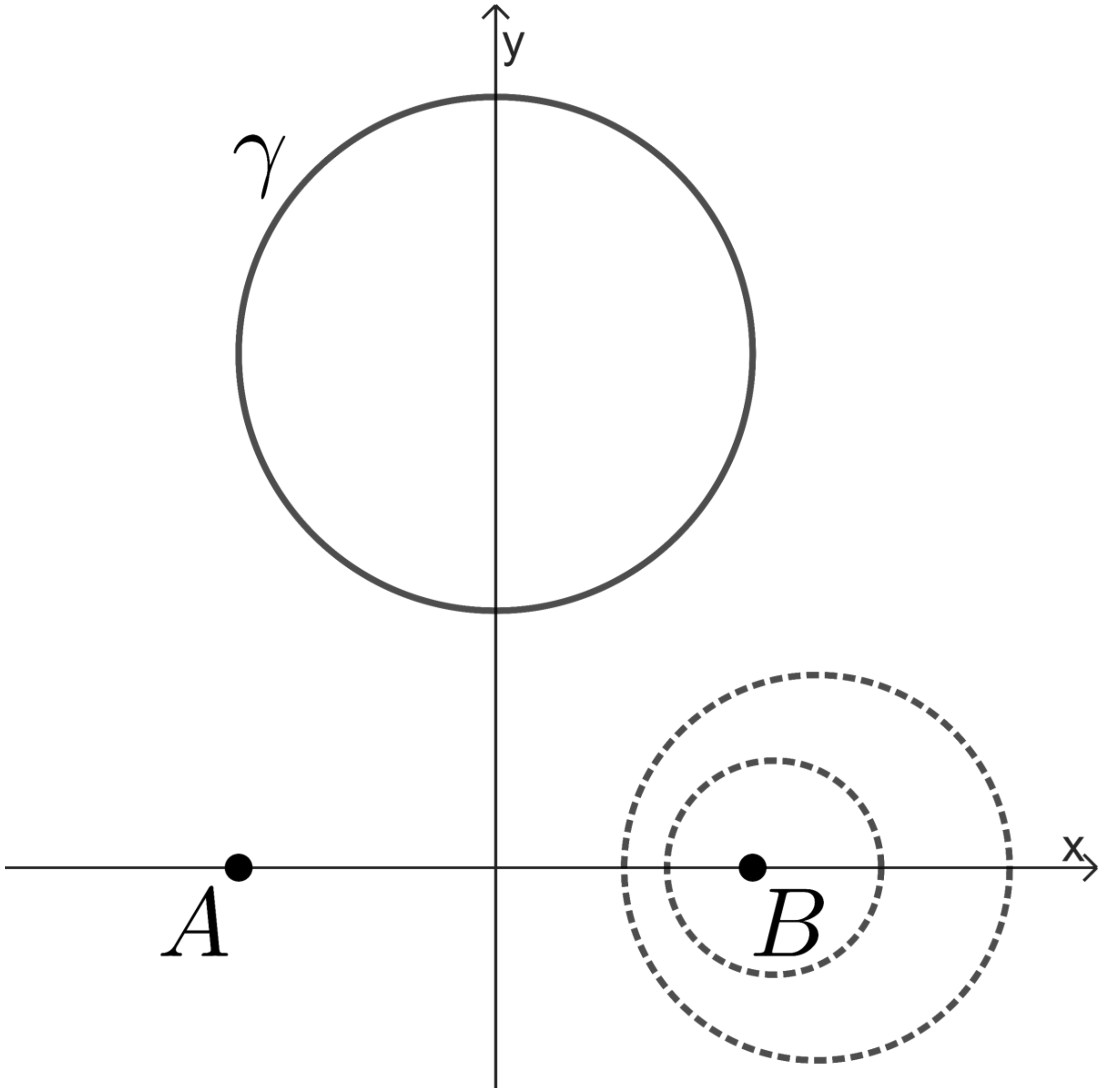
con $P \in \gamma$

$$\gamma : x^2 + y^2 - 4\,y + 3 = 0$$

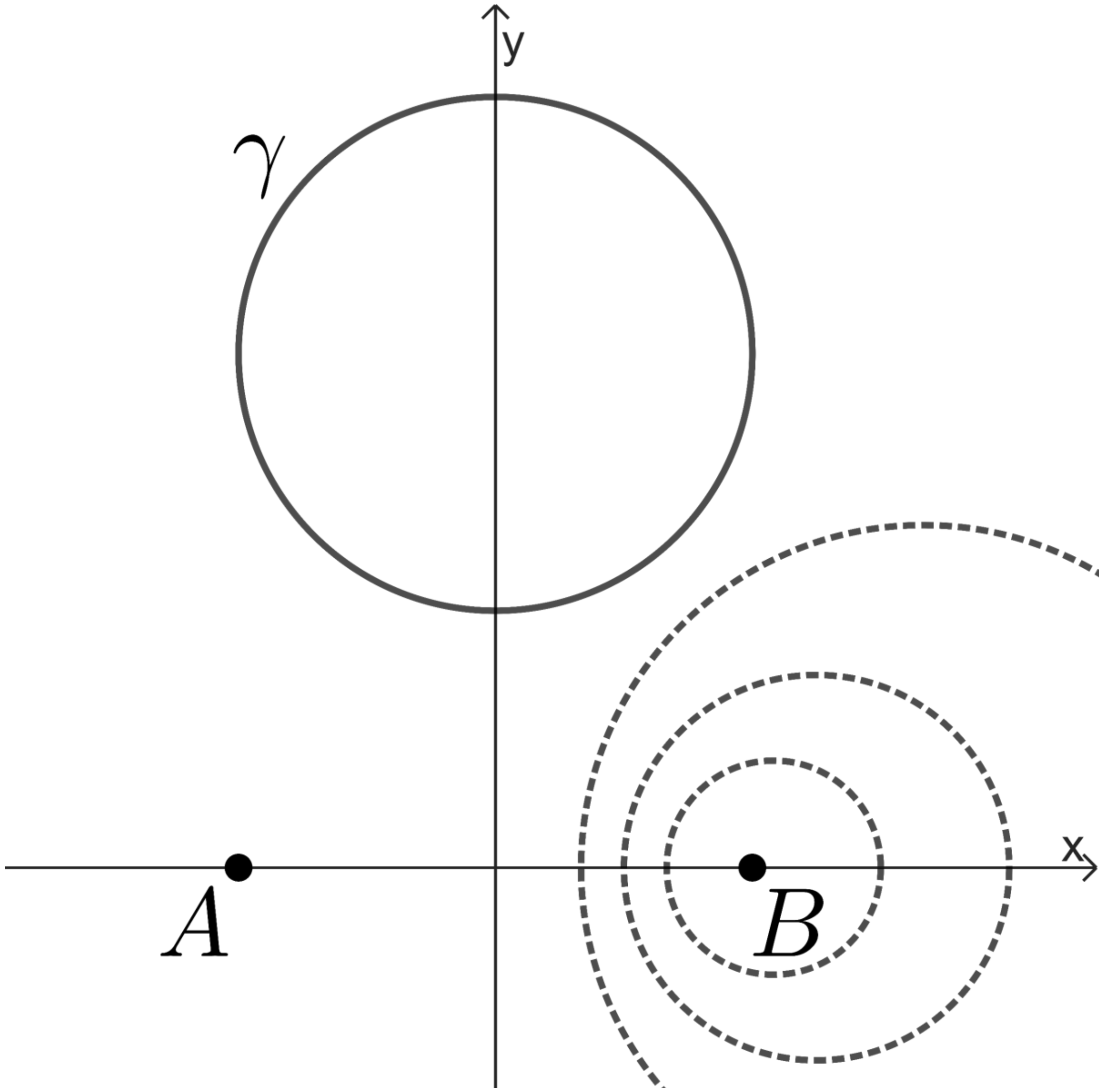
Cerchi di Apollonio



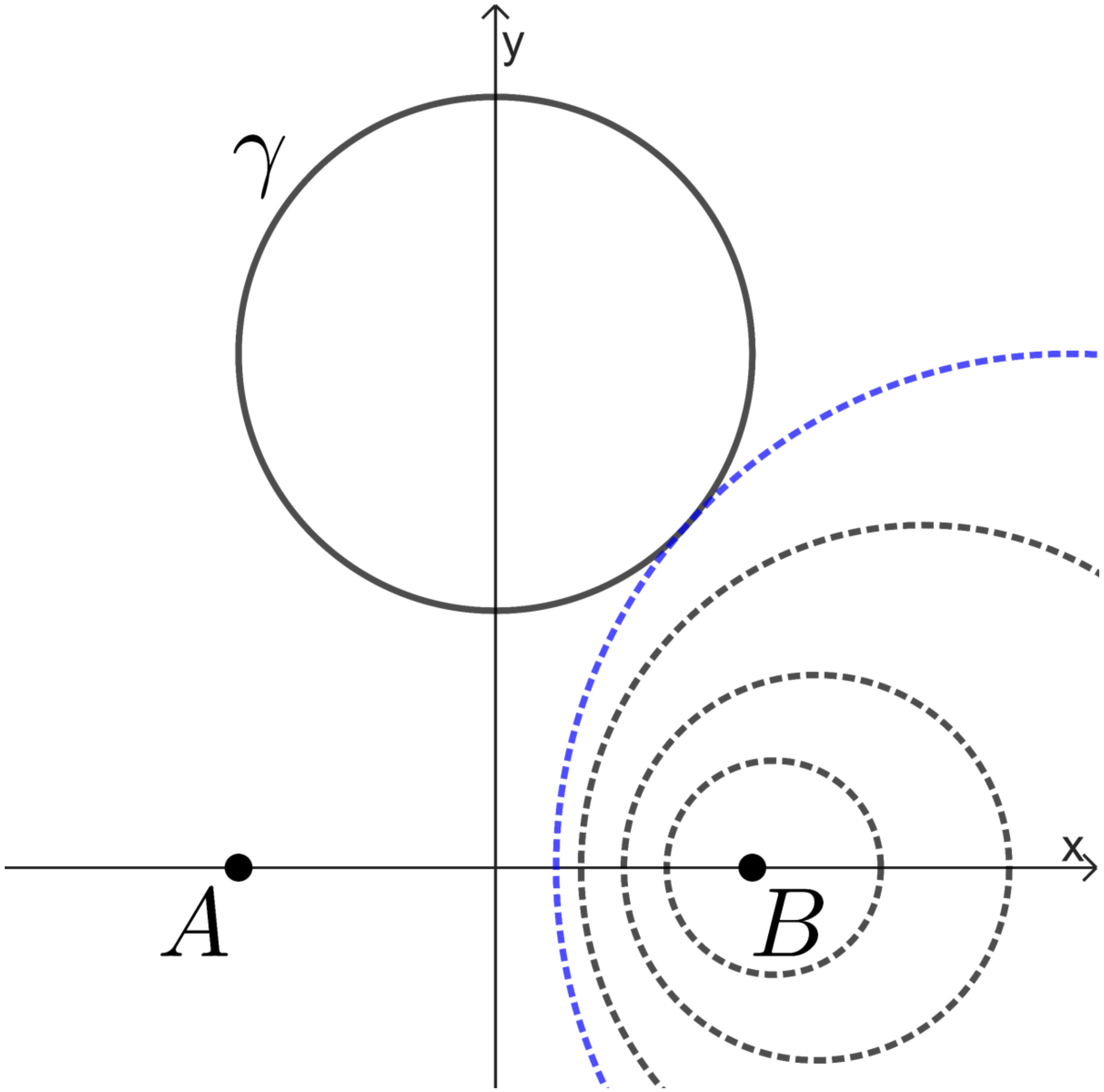
Cerchi di Apollonio



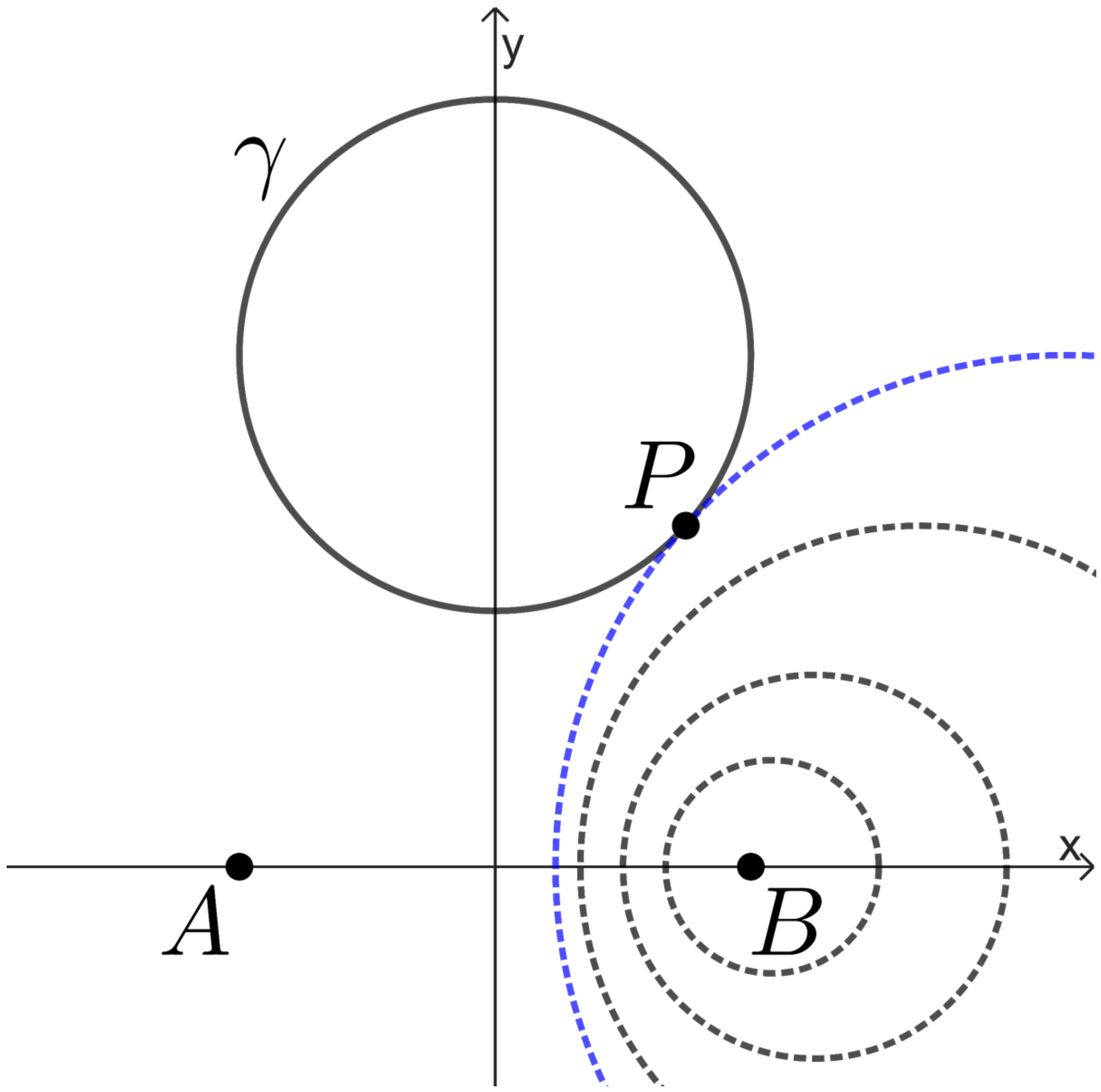
Cerchi di Apollonio



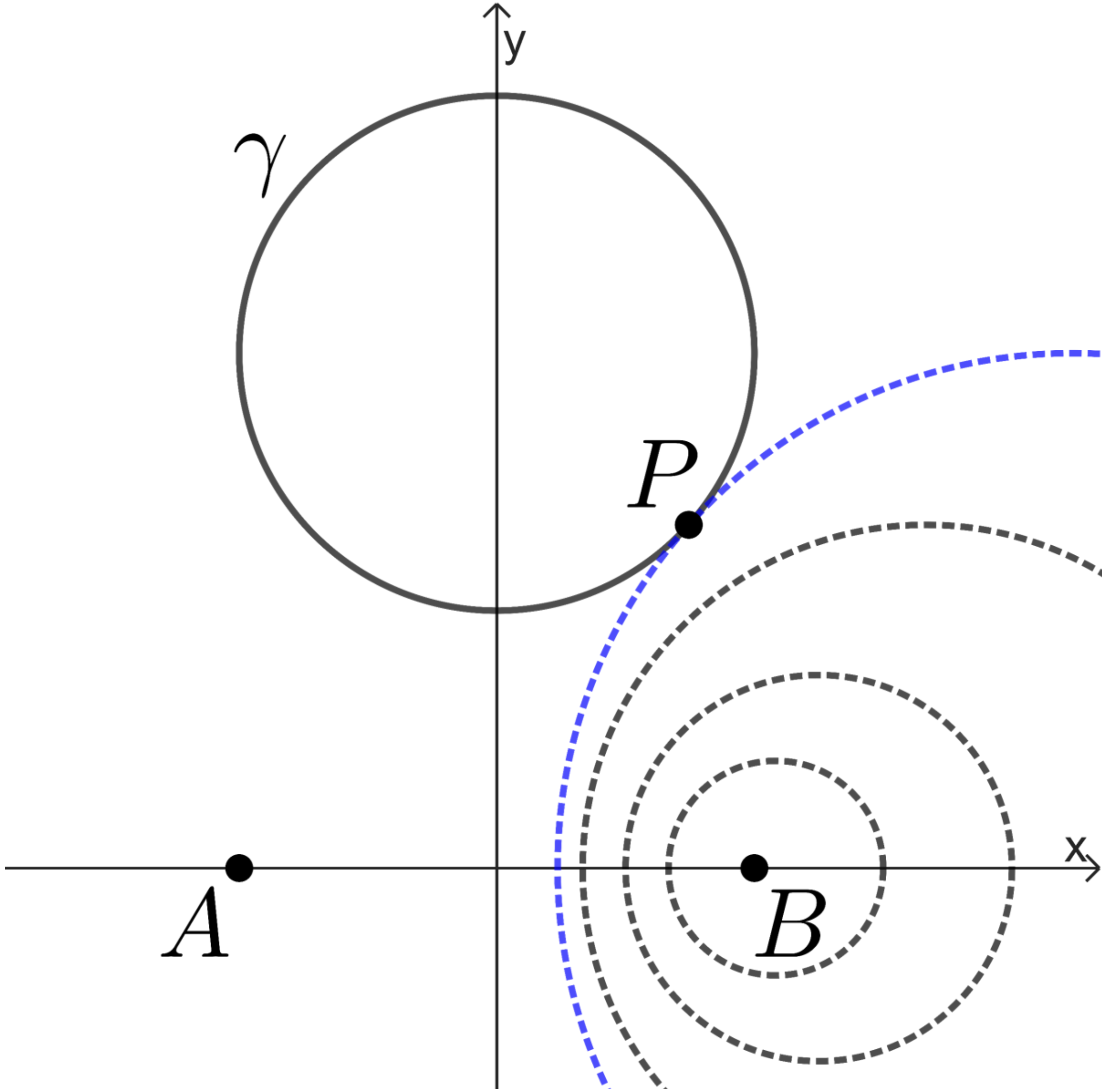
Cerchi di Apollonio



Cerchi di Apollonio

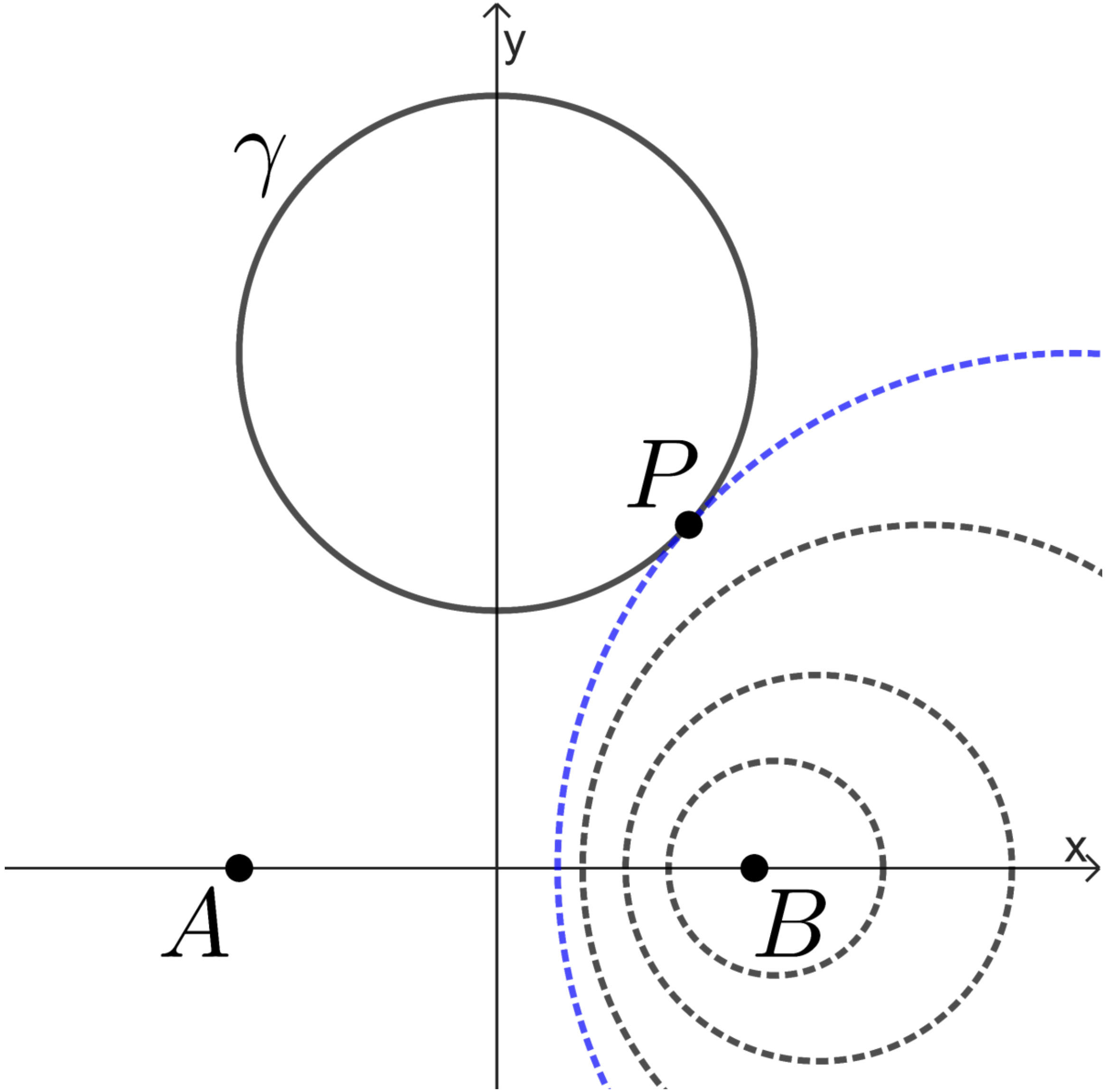


Cerchi di Apollonio



$$P\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$$

Cerchi di Apollonio



$$P\left(\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{4}{3}\right)$$

$$k^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Cerchi di Apollonio

$$\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = k$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$(1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 + (2\,k^2+2)\,x + 1 - k^2 = 0$$

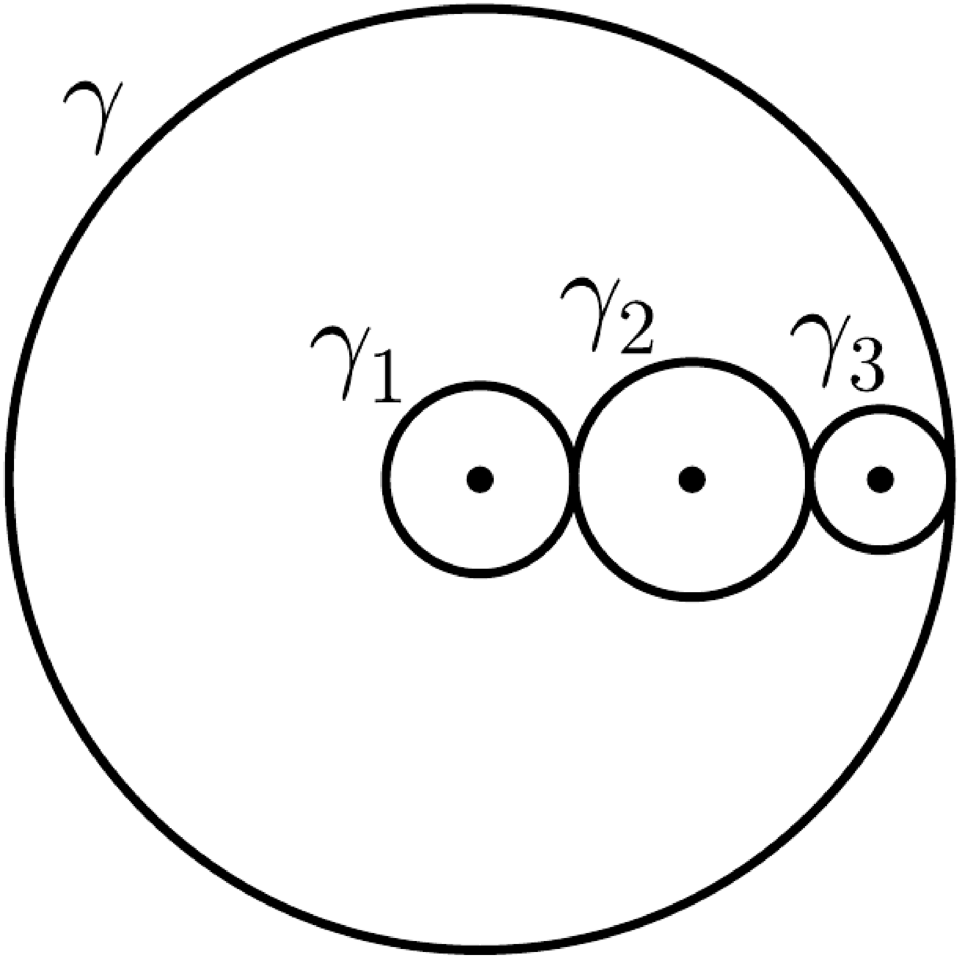
Cerchi di Apollonio

$$\begin{cases} (1-k^2)x^2+(1-k^2)y^2+(2\,k^2+2)\,x+1-k^2=0 \\ x^2+y^2-4\,y+3=0 \end{cases}$$

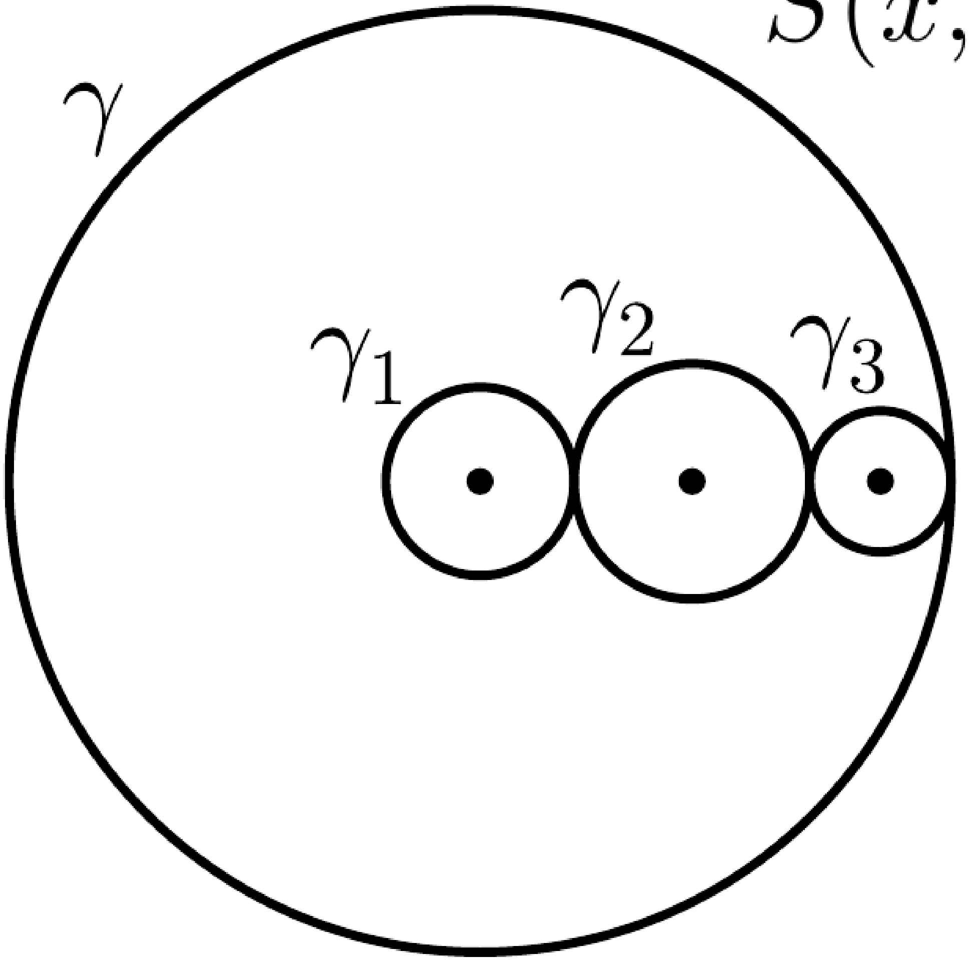
deve avere due soluzioni coincidenti

$$k^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Somma delle tre aree minima



Somma delle tre aree minima



$$S(x,y,z) = \pi\, x^2 + \pi\, y^2 + \pi\, z^2$$
$$= \pi\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

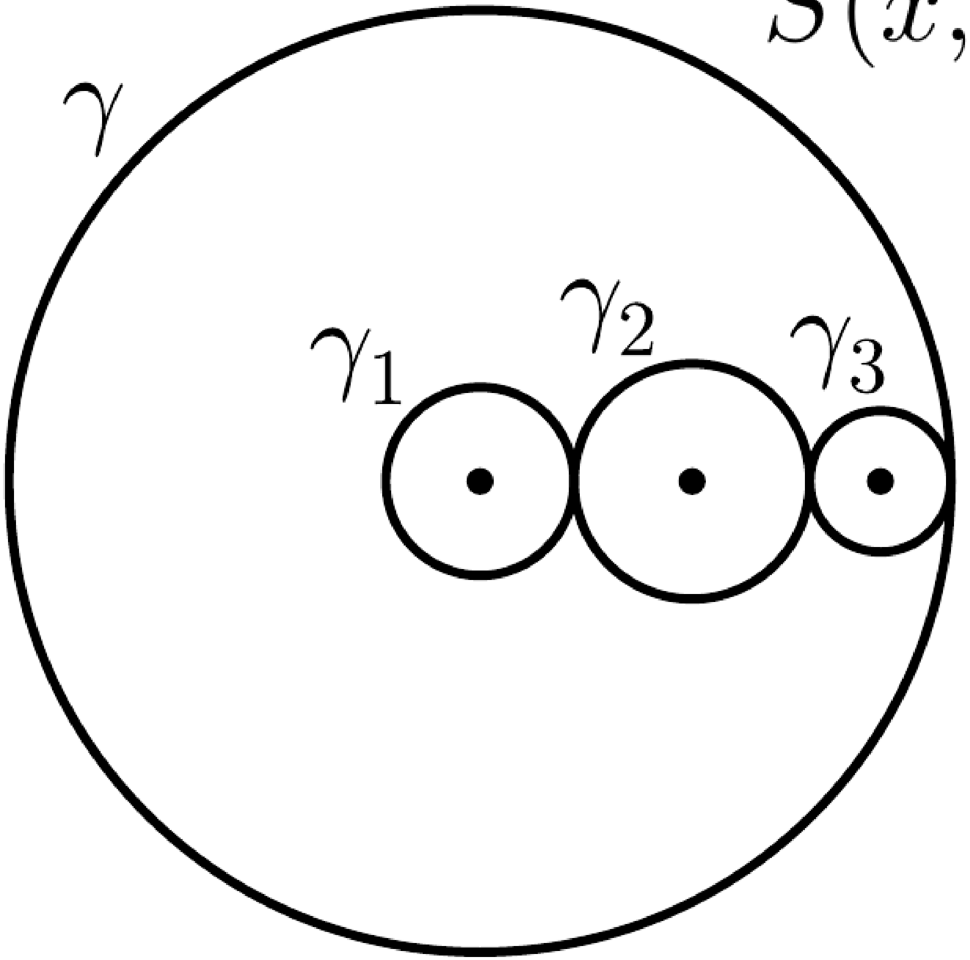
$$x + 2\,y + 2\,z = r$$

Punto del piano

$\pi : x + 2\,y + 2\,z = r$

più vicino all'origine

Somma delle tre aree minima



$$S(x,y,z) = \pi\, x^2 + \pi\, y^2 + \pi\, z^2$$

$$= \pi\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x + 2\,y + 2\,z = r$$

$$x = \frac{1}{9}\,r \qquad y = z = \frac{2}{9}\,r$$

Minimo di una funzione

Si determini il minimo assoluto della funzione

$$f(\theta) = \frac{2 + \cos\theta}{\sqrt{5 + 4\,\cos\theta}}$$

sull'intervallo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

Minimo di una funzione

$$f(\theta) = \frac{2 + \cos\theta}{\sqrt{5 + 4\ \cos\theta}}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 + \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha \ = \ \frac{\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{w})}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v} + \vec{w}\|}$$

Minimo di una funzione

$$f(\theta) = \frac{2 + \cos\theta}{\sqrt{5 + 4\,\cos\theta}}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 + \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha \; = \frac{2 \cdot (2 + \cos\theta) + 0 \cdot \sin\theta}{2 \cdot \sqrt{(2 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}$$

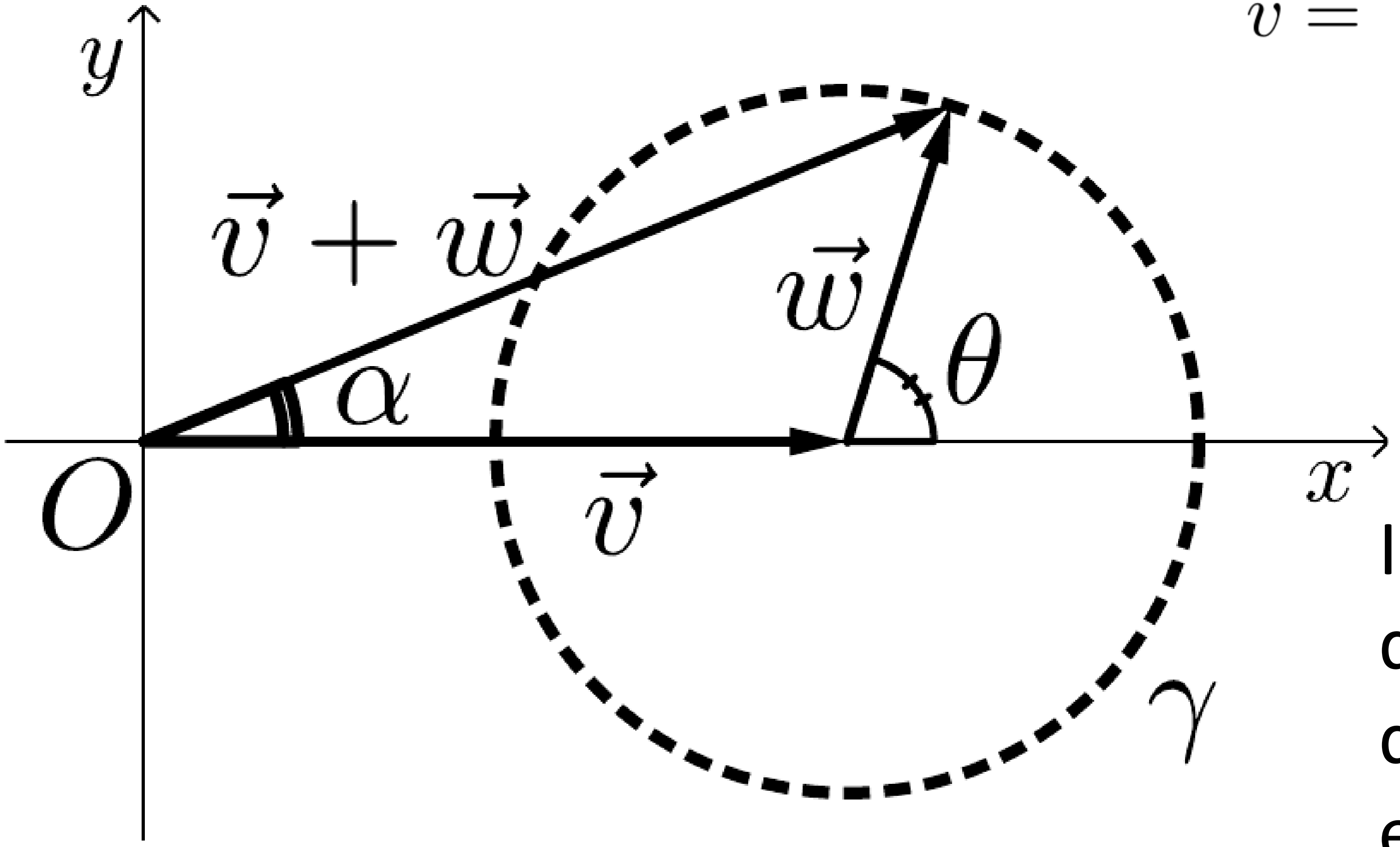
Minimo di una funzione

$$f(\theta) = \frac{2+\cos\theta}{\sqrt{5+4\,\cos\theta}}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix} 2+\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{2+\cos\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}}$$

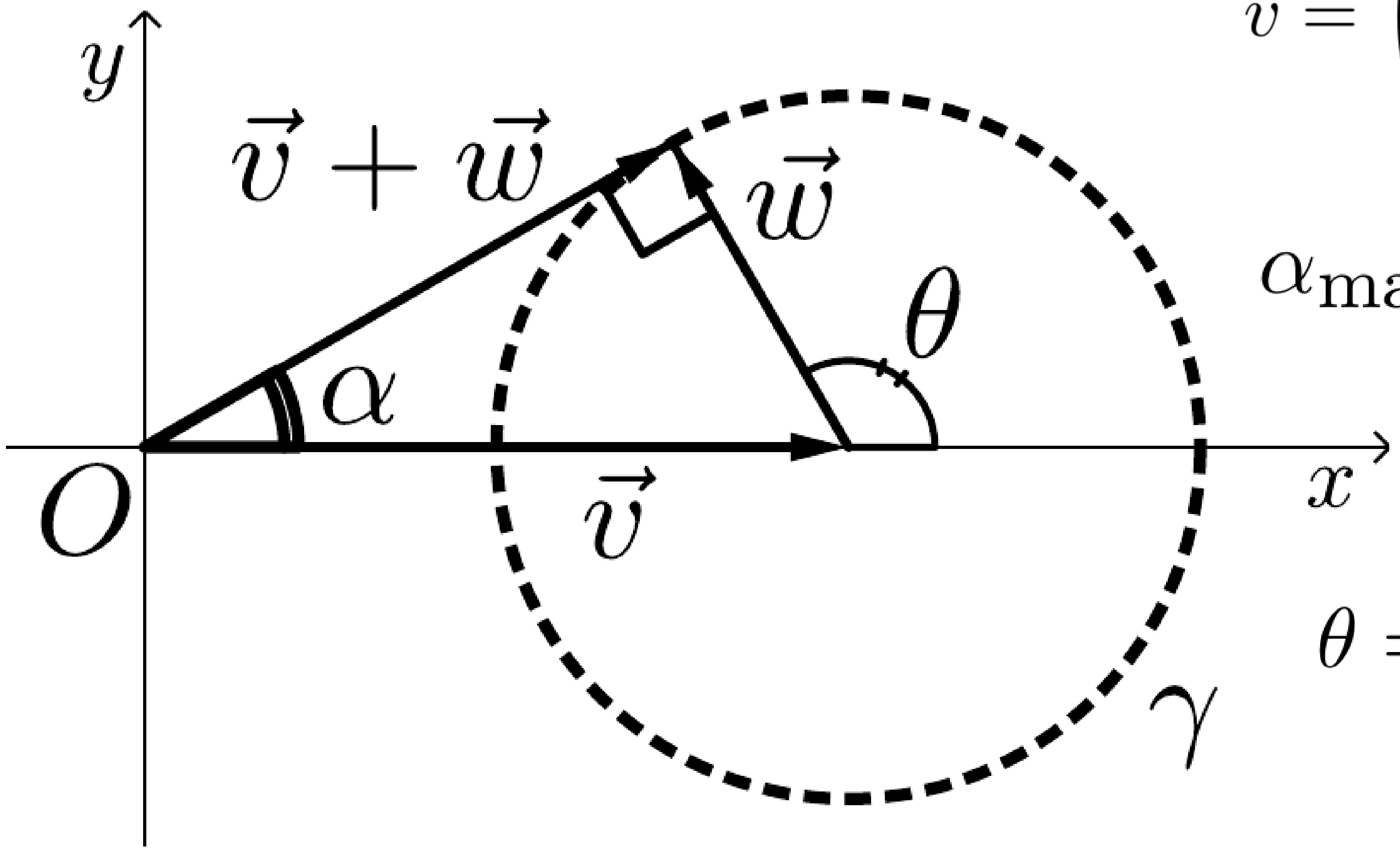
Minimo di una funzione



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Il coseno dell’angolo α deve essere **minimo**, quindi l’angolo α deve essere **massimo**.

Minimo di una funzione



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{\max} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha_{\max} = \frac{2\,\pi}{3}$$

$$f_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si determini il massimo relativo della funzione

$$f(x) = -x^3 + h\,x \qquad \text{con } h > 0.$$

Si determini il massimo relativo della funzione

$$f(x) = -x^3 + h\,x \qquad \text{con } h > 0.$$

Indichiamo con $M > 0$ il massimo di $f(x)$

e con $k > 0$ la corrispondente ascissa

la somma delle radici del polinomio

$p(x) = -x^3 + h\,x - M$ è uguale a 0

(il coefficiente di 2^o grado è nullo)

Si determini il massimo relativo della funzione

$$f(x) = -x^3 + h\,x \qquad \text{con } h > 0.$$

$$-\,x^3 + h\,x - M \;=\; -(x-k)^2(x+2\,k) \qquad \Rightarrow$$

$$-\,x^3 + h\,x - M \;=\; -x^3 + 3\,k^2 x - 2\,k^3$$

Uguagliando i rispettivi coefficienti si trova:

$$\begin{cases} h = 3\,k^2 \\ M = 2\,k^3 \end{cases} \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{h}{3}} \quad M = 2\sqrt{\frac{h^3}{27}}$$

Determinare i massimi e minimi della funzione $f(x) = 4 + \sin x - \sin^2 x$

Determinare i massimi e minimi della funzione $f(x) = 4 + \sin x - \sin^2 x$

$$4 + \sin x - \sin^2 x = \frac{17}{4} - \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Determinare i massimi e minimi della funzione $f(x) = 4 + \sin x - \sin^2 x$

$$4 + \sin x - \sin^2 x = \frac{17}{4} - \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2$$

i punti di **massimo assoluto** si ottengono quando $\sin x = \frac{1}{2}$

i punti di **minimo relativo non assoluto** si hanno per $\sin x = 1$

i punti di **minimo assoluto** si ottengono quando $\sin x = -1$

Si determini il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \arcsin^3 x \cdot \arccos^2 x \quad \text{sull'intervallo } [0, 1].$$

Si determini il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \arcsin^3 x \cdot \arccos^2 x \qquad \text{sull'intervallo } [0,1].$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) \ = \ 108 \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arccos x}{2} \cdot \frac{\arccos x}{2}$$

i 5 fattori hanno somma costante

$$\frac{\arcsin x}{3} = \frac{\arccos x}{2} \quad \Rightarrow \qquad 2 \arcsin x \ = \ 3\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

Si determini il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \arcsin^3 x \cdot \arccos^2 x \qquad \text{sull'intervallo } [0, 1].$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 108 \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arccos x}{2} \cdot \frac{\arccos x}{2}$$

i 5 fattori hanno somma costante

$$\frac{\arcsin x}{3} = \frac{\arccos x}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \arcsin x = 3\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$\arcsin x = \frac{3\pi}{10}$$

Si determini il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \arcsin^3 x \cdot \arccos^2 x \qquad \text{sull'intervallo } [0, 1].$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 108 \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arcsin x}{3} \cdot \frac{\arccos x}{2} \cdot \frac{\arccos x}{2}$$

i 5 fattori hanno somma costante

$$\frac{\arcsin x}{3} = \frac{\arccos x}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \arcsin x = 3\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$\arcsin x = \frac{3\pi}{10} \qquad x = \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Grazie per l’attenzione